Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

8ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Άσκηση 1 (Αναδρομικά ορισμένη ακολουθία και σύγκλιση)**.** Ορίζουμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με αναδρομή ως εξής:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \quad n \geq 1.$$

Δείξτε ότι:

(i) $0 < a_n < 2$ για κάθε $n \geq 1$,

(ii) $a_n < a_{n+1}$ για κάθε $n \geq 1$,

(iii) $a_n \to \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Υπόδειξη. Στα (i) και (ii) χρησιμοποιείστε την Αρχή της Επαγωγής.

Λύση.

(i) Προφανώς ισχύει $0 < a_1 < 2$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 1$ ισχύει $0 < a_n < 2$ και δείχνουμε ότι $0 < a_{n+1} < 2$. Έχουμε

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{1+a_n} \\ &> \sqrt{1+0} \quad \text{(από Επαγωγική Υπόθεση)} \\ &= 1 > 0. \end{aligned}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{1+a_n} \\ &< \sqrt{1+2} \quad \text{(από Επαγωγική Υπόθεση)} \\ &= \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2. \end{aligned}$$

Επομένως $0 < a_{n+1} < 2$ και από την Αρχή Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Για $n = 1$ ισχύει

$$a_1 = 1 < \sqrt{2} = a_2.$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 1$ ισχύει $a_n < a_{n+1}$ και δείχνουμε ότι $a_{n+1} < a_{n+2}$. Έχουμε

$$a_n < a_{n+1} \iff 1 + a_n < 1 + a_{n+1} \iff \sqrt{1+a_n} < \sqrt{1+a_{n+1}} \iff a_{n+1} < a_{n+2}.$$

Επομένως $a_{n+1} < a_{n+2}$ και από την Αρχή Επαγωγής προκύπτει το ζητούμενο.

(iii) Εφόσον η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη τότε συγκλίνει σε κάποιο αριθμό a. (*Προσοχή*: Μην ξεχνάτε να το αναφέρετε αυτό, γιατί αν δεν αιτιολογήσετε την ύπαρξη του ορίου τότε δεν μπορείτε να πάρετε τα όρια στις δύο πλευρές της ισότητας όπως κάνουμε πιο κάτω.)

Αφού $a_n \to a$ έχουμε επίσης $a_{n+1} \to a$. Παίρνοντας όρια και στις δύο πλευρές της ισότητας $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ προκύπτει η εξίσωση

$$a = \sqrt{1+a}.$$

Λύνουμε

$$a^2 = 1 + a \iff a^2 - a - 1 = 0 \iff a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Εφόσον $a_n > 0$ για κάθε $n \geq 1$ έχουμε $a = \lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$. Επομένως η λύση $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ απορρίπτεται και άρα $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Έχουμε δηλαδή $a_n \to \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Άσκηση 2 (Αναδρομικά ορισμένη ακολουθία και σύγκλιση)**.** Ορίζουμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με αναδρομή ως εξής:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 6 \cdot \frac{1+a_n}{7+a_n} \quad n \geq 1.$$

Δείξτε ότι

(i) $1 \leq a_n \leq 2$ για κάθε $n \geq 1$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε την Αρχή της Επαγωγής. Μπορείτε να αναδιατυπώσετε τις ζητούμενες ανισότητες $1 \leq a_{n+1} \leq 2$ σε πιο απλές ισοδύναμες ανισότητες.

(ii) $a_{n+1} \geq a_n$ για κάθε $n \geq 1$.

(iii) $a_n \to 2$.

Λύση.

(i) Για $n = 1$ έχουμε $a_1 = 1 \in [1, 2]$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 1$ έχουμε $1 \leq a_n \leq 2$. Δείχνουμε ότι $1 \leq a_{n+1} \leq 2$. Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} \geq 1 &\iff 6 \cdot \frac{1+a_n}{7+a_n} \geq 1 \\
&\iff 6 + 6a_n \geq 7 + a_n \quad \text{(παρατηρήστε ότι από την Επαγωγική Υπόθεση ισχύει} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{$7 + a_n \geq 8 > 0$, επομένως η φορά της ανισότητας δεν αλλάζει} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{όταν πολλαπλασιάζουμε με $7 + a_n$)} \\
&\iff 5a_n \geq 1 \\
&\iff a_n \geq \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει γιατί από την Επαγωγική Υπόθεση έχουμε $a_n \geq 1$. Από τις προηγούμενες ισοδυναμίες προκύπτει $a_{n+1} \geq 1$. Δείχνουμε όμοια ότι $a_{n+1} \leq 2$:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} \leq 2 &\iff 6 \cdot \frac{1+a_n}{7+a_n} \leq 2 \\
&\iff 6 + 6a_n \leq 14 + 2a_n \quad \text{(πάλι από την Επαγωγική Υπόθεση $7 + a_n > 0$)} \\
&\iff 4a_n \leq 8 \\
&\iff a_n \leq 2
\end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει από την Επαγωγική Υπόθεση, επομένως $a_{n+1} \leq 2$. Από την Αρχή Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Έχουμε

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 6\cdot\frac{1+a_n}{7+a_n}\\
&\geq 6\cdot\frac{1+a_n}{9} \qquad (\text{από το (i) αφού } 7+a_n\leq 7+2\leq 9)\\
&= \frac{2}{3}\cdot(1+a_n)\\
&= \frac{2}{3}+\frac{2a_n}{3}\\
&\geq \frac{a_n}{3}+\frac{2a_n}{3} \quad (\text{πάλι από το (i) αφού έχουμε } 2\geq a_n)\\
&= a_n.
\end{aligned}$$

(iii) Από τα (i) και (ii) η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, επομένως συγκλίνει σε κάποιο $a\in\mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι $a=2$. Αφού $a_n\to a$ τότε $a_{n+1}\to a$. Θεωρούμε τη σχέση

$$a_{n+1}=6\cdot\frac{1+a_n}{7+a_n}$$

και παίρνουμε το όριο και στις δύο πλευρές. Καταλήγουμε

$$a=6\cdot\frac{1+a}{7+a}$$

Λύνοντας την εξίσωση μπορούμε να υπολογίσουμε το a,

$$\begin{aligned}
a=6\cdot\frac{1+a}{7+a} &\iff 7a+a^2=6+6a\\
&\iff a^2+a-6=0\\
&\iff (a+3)(a-2)=0\\
&\iff a=-3 \quad \text{ή} \quad a=2.
\end{aligned}$$

Αφού $1\leq a_n\leq 2$ για κάθε $n\geq 1$, τότε και το όριο a θα ικανοποιεί $1\leq a\leq 2$. Επομένως η λύση $a=-3$ απορρίπτεται και προκύπτει $a=2$.

Άσκηση 3 (Κριτήριο Ρίζας). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2}.$$

Λύση.

Εφαρμόζουμε το Κριτήριο της Ρίζας σε όλες τις σειρές. (Κάθε φορά με $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ θα εννοούμε την ακολουθία της σειράς με την οποία ασχολούμαστε.)

Στην πρώτη σειρά έχουμε

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}\longrightarrow\frac{1}{e}<1.$$

Από το Κριτήριο της Ρίζας η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ συγκλίνει.

Στη δεύτερη

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\longrightarrow e>1.$$

Από το Κριτήριο της Ρίζας η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ αποκλίνει.

Σχετικά με την τελευταία σειρά

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{e^{-n^2}} = e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n \longrightarrow 0 < 1.$$

Από το Κριτήριο της Ρίζας η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ συγκλίνει.

Άσκηση 4 (Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης)**.** Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{4n^5-3n+1}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n+1}{n^{7/2}+2}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n-5}{2^n}\,.$$

Υπόδειξη: Στην πρώτη σειρά θεωρήστε την ακολουθία $b_n = \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$. Ακολουθήστε παρόμοιο συλλογισμό στις άλλες δύο σειρές.

Λύση.

Σχετικά με την πρώτη σειρά θεωρούμε τις ακολουθίες

$$a_n = \frac{n^3+1}{4n^5-3n+1}\,, \quad b_n = \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}, \quad n \geq 1.$$

Εξετάζουμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^3+1}{4n^5-3n+1} \cdot n^2 = \frac{n^5+n^2}{4n^5-3n+1} = \frac{1+1/n^3}{4-3/n^4+1/n^5} \longrightarrow \frac{1}{4} > 0.$$

Από το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

Γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, επομένως συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{4n^5-3n+1}$.

Προχωράμε στη δεύτερη σειρά. Θέτουμε

$$a_n = \frac{n^3+2n+1}{n^{7/2}+2}\,, \quad b_n = \frac{n^3}{n^{7/2}} = \frac{1}{n^{1/2}}, \quad n \geq 1.$$

Εξετάζουμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^3+2n+1}{n^{7/2}+2} \cdot n^{1/2} = \frac{n^{7/2}+2n^{3/2}+n^{1/2}}{n^{7/2}+2} = \frac{1+2/n^2+1/n^3}{1+2/n^{7/2}} \longrightarrow \frac{1+0}{1+0} = 1 > 0.$$

Από το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

Γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ αποκλίνει, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n+1}{n^{7/2}+2}$ αποκλίνει επίσης.

Στην τελευταία σειρά θεωρούμε τις ακολουθίες

$$a_n = \frac{4^n-5}{2^n}\,, \quad b_n = \frac{4^n}{2^n} = 2^n, \quad n \geq 1.$$

Εξετάζουμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{4^n-5}{2^n} \cdot 2^{-n} = \frac{2^{2n} \cdot 2^{-n} - 5 \cdot 2^{-n}}{2^n} = \frac{2^n - 5 \cdot 2^{-n}}{2^n} = 1 - \frac{5}{4^n} \longrightarrow 1 > 0.$$

Από το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ αποκλίνει, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n-5}{2^n}$ αποκλίνει επίσης.

2ος τρόπος για την τελευταία σειρά: Παρατηρούμε ότι

$$\frac{4^n-5}{2^n} = 2^n - \frac{5}{2^n} \geq 1$$

για κάθε $n \geq$ **2**. (Η ανισότητα μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή.) Άρα η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με $a_n = \dfrac{4^n-5}{2^n}$, $n \geq 1$ δεν συγκλίνει στο 0 (για την ακρίβεια συγκλίνει στο $+\infty$) και επομένως η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει.

Άσκηση 5. Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές όπως ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos(n)}{3^n}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-3}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5+1/n)^n}{(2^n)^2}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^n\cdot(n!)^2}\,,$$

ως προς τη σύγκλιση.

Λύση.

Στην πρώτη σειρά έχουμε

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} \quad\longrightarrow\quad 0<1$$

επομένως από το Κριτήριο της Ρίζας η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ συγκλίνει.

Στη δεύτερη σειρά παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{1+\cos(n)}{3^n}\right| \leq \frac{1+|\cos(n)|}{3^n} \leq \frac{1+1}{3^n} = \frac{2}{3^n}\,,$$

όπου στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την τριγωνική ανισότητα $|x+y| \leq |x|+|y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Εφόσον η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ συγκλίνει, η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$ συγκλίνει επίσης.

Εφόσον $\left|\dfrac{1+\cos(n)}{3^n}\right| \leq \dfrac{2}{3^n}$ για κάθε $n \geq 1$, από το Κριτήριο Σύγκρισης η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos(n)}{3^n}$ συγκλίνει απόλυτα και άρα συγκλίνει και με τη συνήθη έννοια.

Σχετικά με την τρίτη σειρά μπορούμε να εφαρμόσουμε το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης με $a_n = \dfrac{1}{4n^2-3}$ και $b_n = \dfrac{1}{n^2}$, $n \geq \mathbb{N}^*$.

Παρατηρούμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{4n^2-3}\cdot n^2 = \frac{n^2}{4n^2-3} = \frac{1}{4-3/n^2} \quad\longrightarrow\quad \frac{1}{4} > 0.$$

Εφόσον η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης συγκλίνει και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-3}$.

β' τρόπος: Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $4n^2-3 \geq n^2$ για κάθε n, (ισοδύναμα $4n^2-n^2 \geq 3$ που ισχύει). Άρα $\dfrac{1}{4n^2-3} \leq \dfrac{1}{n^2}$ για κάθε $n \geq 1$. Εφόσον η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από το Κριτήριο Σύγκρισης συγκλίνει και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-3}$.

Στην τέταρτη σειρά εφαρμόζουμε το Κριτήριο της Ρίζας,

$$\sqrt[n]{\frac{(5+1/n)^n}{(2^n)^2}} = \frac{5+1/n}{2^2} \quad\longrightarrow\quad \frac{5}{4} > 1$$

επομένως η σειρά αποκλίνει.

Στην τελευταία σειρά έχουμε

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(2(n+1))!}{2^{n+1}\cdot((n+1)!)^2}\cdot\frac{2^n\cdot(n!)^2}{(2n)!}\\
&= \frac{2^n}{2^{n+1}}\cdot\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\cdot\left[\frac{n!}{(n+1)!}\right]^2\\
&= \frac{1}{2}\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^2\\
&= \frac{4n^2+4n+2n+2}{2(n^2+2n+1)}\\
&= \frac{2n^2+3n+1}{n^2+2n+1}\\
&= \frac{2+3/n+1/n^2}{1+2/n+1/n^2} \longrightarrow 2>1.
\end{aligned}
$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^n\cdot(n!)^2}$ αποκλίνει.

Άσκηση 6. Θεωρούμε την ακολουθία $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n\geq 1$. Εξετάστε τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$$

ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση.

Λύση.

Γνωρίζουμε ότι $\frac{1}{n}\to 0$ και συνεπώς $\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{1}{n}}\to 0$. Επιπλέον είναι σαφές ότι $\frac{1}{\sqrt{n+1}}\leq\frac{1}{\sqrt{n}}$ για κάθε $n\geq 1$. Από το Κριτήριο του Leibniz η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει.

Παρατηρούμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ που αποκλίνει. Άρα η $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ δεν συγκλίνει απολύτως.

Σχετικά με τη δεύτερη σειρά βλέπουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, η οποία αποκλίνει.