Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

7ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Άσκηση 1 (Άλγεβρα Σειρών)**.**

(i) Δώστε το παράδειγμα δύο ακολουθιών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ για τις οποίες η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ συγκλίνει αλλά οι σειρές $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ αποκλίνουν.

(ii) Δείξτε ότι αν οι σειρές $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνουν τότε η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ συγκλίνει επίσης.

(iii) Δείξτε ότι αν $c\neq 0$ και η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c\cdot a_n$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει.

Άσκηση 2 (Διερεύνηση Σύγκλισης)**.** Εξετάστε ως προς τη σύγλιση τις ακόλουθες σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n,\quad \text{όπου } |x|\geq 1,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n+(-1)^{n+1}\right].$$

Άσκηση 3. Δίνονται $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ και $n\geq 1$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}=\frac{1-x^n}{1-x}$$

και

$$\sum_{k=1}^{n}x^{k}=\frac{x(1-x^n)}{1-x}\ .$$

Υπόδειξη: Ένας τρόπος να αποδειχθεί η πρώτη ισότητα είναι με επαγωγή. Ένας άλλος τρόπος είναι να υπολογίσετε: $(1-x)\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}x^{k-1}=\sum\limits_{k=1}^{n}x^{k-1}-x\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}x^{k-1}=\ldots.$

Άσκηση 4 (Εύρεση ορίου σειράς)**.** Βρείτε το όριο των ακόλουθων σειρών:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^{n+3}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}-4^{n+2}}{5^{n+1}}\ .$$

Άσκηση 5 (Κριτήριο Σύγκρισης)**.** Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n^2+1)}{2^n} \ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) \ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2} \ .$$

Υπόδειξη: Υπενθυμίζουμε την ανισότητα $\sin x \leq x$ για κάθε $x \geq 0$.

Άσκηση 6 (Κριτήριο Λόγου)**.** Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n} \ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{n^n} \ .$$