Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

6ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Άσκηση 1. Ποια από τα παρακάτω σύνολα περιέχουν *σχεδόν όλα* τα $n \in \mathbb{N}$; (Χωρίς απόδειξη)

$$A = \{5, 6, 7, \ldots, 99, 100\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \geq 400\}$$
$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid (n-3) \cdot (n-8) > 0\}$$
$$C = \{n \in \mathbb{N} \mid (n-3) \cdot (n-8) = 0\}$$
$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ο } n \text{ είναι άρτιος}\}$$

Άσκηση 2 (Κατανόηση σύγκλισης)**.** Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ που συγκλίνει στον αριθμό 1. Ποια από τα παρακάτω σύνολα περιέχουν σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και ποια σύνολα είναι πεπερασμένα;

$$A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 0,99 < a_n < 1,01\}$$
$$B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n \leq 0,999\}$$
$$C = \{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n > 1,1\}$$
$$D = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 0,9999 < a_n\}$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 3 (Επαλήθευση με βάση τον ορισμό)**.** Δείξτε με βάση τον ορισμό ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$ συκλίνει στο 0.

Άσκηση 4 (Θεωρία Σύγκλισης)**.** Θεωρούμε δύο ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ and $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ πραγματικών αριθμών. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς; Αν μια πρόταση είναι αληθής δώστε απόδειξη, αλλιώς δώστε ένα παράδειγμα όπου η πρόταση δεν ισχύει.

(i) Αν η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι φραγμένη τότε $a_n \cdot \dfrac{1}{n} \to 0$.

(ii) Αν η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι φραγμένη και η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι συγκλίνουσα τότε η $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι επίσης συγκλίνουσα.

(iii) Αν οι $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι αποκλίνουσες τότε και η $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι αποκλίνουσα.

(iv) Αν οι $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι συγκλίνουσες τότε και η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι συγκλίνουσα.

Άσκηση 5 (Όριο ρητών παραστάσεων)**.**

(i) Δείξτε ότι $\dfrac{1}{2n^2 - 1} \to 0$. (Χωρίς τη χρήση του ορισμού.)

(ii) Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 - 2n + 1}{5n^3 + n^2 + 1}$.

(iii) (Γενίκευση των προηγουμένων) Δίνονται δύο πολυώνυμα

$$p(x) = a_k x^k + \cdots + a_0 \quad \text{και} \quad q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$$

με $a_k, b_m \neq 0$, $m \geq k$ και $m \geq 1$.

Αν $k = m$ δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \frac{a_k}{b_m}$$

και αν $k < m$ δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = 0.$$

Υπόδειξη: Διαιρέστε κάθε φορά τους αριθμητή-παρονομαστή με τη μεγαλύτερη δύναμη του n.

Άσκηση 6 (Υπολογισμός ορίων)**.** Υπολογίστε τα όρια των πιο κάτω ακολουθιών:

(i) $a_n = \left(-\frac{7}{8}\right)^n + \sqrt[n]{n}, \quad n \geq 1.$

(ii) $b_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \geq 1.$

(iii) $c_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}, \quad n \geq 1.$ **Υπόδειξη:** Θεωρήστε τη συζυγή παράσταση.

(iv) $d_n = \dfrac{n^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{n^3 - \sqrt[n]{n} + 1}, \quad n \geq 1.$

(v) $e_n = \sqrt[2n]{2n}, \quad n \geq 1.$ **Υπόδειξη:** Τι σχέση έχει η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με την $x_n = \sqrt[n]{n}$, $n \geq 1$;

(vi) $f_n = \sqrt[2n]{n}, \quad n \geq 1.$

Άσκηση 7 (Διερεύνηση σύγκλισης)**.** Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ που ορίζεται ως εξής:

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2} \quad n \geq 1.$$

Εξετάστε τις ακολουθίες $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ως προς τη σύγκλιση. (Δηλαδή είτε βρείτε το όριο είτε δείξτε ότι δεν συγκλίνουν.)

Υπόδειξη: Συγκλίνουν μόνο δύο από τις προηγούμενες ακολουθίες.

Άσκηση 8 (Ακολουθίες με μεταβλητό πλήθος προσθετέων)**.** Θεωρούμε την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\ .$$

Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει:

(i) $x_{n+1} - x_n > 0$,

(ii) $x_n < 1$.

Τι συμπεραίνετε για την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$; (Μην επιχειρήσετε να υπολογίσετε κάποιο όριο.)

Άσκηση 9. Υπολογίστε τα όρια των πιο κάτω ακολουθιών:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

Υπόδειξη: Εκφράστε τις πιο πάνω ακολουθίες με τη βοήθεια της $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1.$