Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

5ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Άσκηση 1. Θεωρούμε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$I = \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos x}\, dx \qquad \text{και} \qquad J = \int \frac{1}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x}\, dx.$$

(i) Να αναγάγετε τα I και J σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων με κατάλληλη αντικατάσταση.

(ii) Υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα I και J.

Λύση.

(i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $R(u,v) = \dfrac{1}{u^2 \cdot v}$, $u, v \neq 0$, έτσι που

$$I = \int R(\sin x, \cos x)\, dx.$$

Παρατηρούμε ότι

$$R(u,-v) = \frac{1}{u^2 \cdot (-v)} = -R(u,v)$$

δηλαδή η R είναι περιττή ως προς v. (Προσοχή μην μπερδευτείτε με το ότι η συνάρτηση συνημίτονο είναι άρτια - αυτό δεν έχει σχέση σε αυτό το σημείο.)

Σύμφωνα με τα γνωστά το ολοκλήρωμα $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης εφαρμόζοντας την αντικατάσταση $t = \sin x$.

Έχουμε $dt = \cos x dx$ και

$$I = \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos x}\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{t^2 \cdot (1-t^2)}\, dt,$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$. Επομένως έχουμε εκφράσει το I ως αόριστο ολοκλήρωμα της ρητής συνάρτησης $f(t) = \dfrac{1}{t^2 \cdot (1-t^2)}$, $t \neq 0$.

Στο ολοκλήρωμα J παίρνουμε $Q(u,v) = \dfrac{1}{u^4 \cdot v^2}$, $u, v \neq 0$, έτσι που

$$J = \int Q(\sin x, \cos x)\, dx.$$

Παρατηρούμε ότι η Q είναι άρτια ως προς το ζεύγος (u,v), δηλαδή

$$Q(-u,-v) = \frac{1}{(-u)^4 \cdot (-v)^2} = \frac{1}{u^4 \cdot v^2} = Q(u,v).$$

Σύμφωνα με τα γνωστά το ολοκλήρωμα $\int Q(\sin x, \cos x)\, dx$ ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης εφαρμόζοντας την αντικατάσταση $t = \tan x$.

Έχουμε $dt = \dfrac{1}{\cos^2 x} dx$ και

$$J = \int \frac{1}{\sin^4 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx,$$

άρα θέλουμε να εκφράσουμε την ποσότητα $1/\sin^4 x$ συναρτήσει του t. Αφού $t = \tan x$ έχουμε

$$\begin{aligned} &\sin^2 x = t^2 \cos^2 x \implies \sin^2 x = t^2(1-\sin^2 x) \\ \implies &\sin^2 x = t^2 - t^2 \sin^2 x \implies \sin^2 x(1+t^2) = t^2 \\ \implies &\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \implies \sin^4 x = \frac{t^4}{(1+t^2)^2} \\ \implies &\frac{1}{\sin^4 x} = \frac{(1+t^2)^2}{t^4}. \end{aligned}$$

Επομένως

$$J = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4}\, dt.$$

(ii) Υπολογίζουμε το $I = \displaystyle\int \frac{1}{t^2(1-t^2)}\, dt$ ως συνάρτηση του t και μετά αντικαθιστούμε $t = \sin x$. Παρατηρούμε ότι το κλάσμα είναι έκφραση του t^2, δηλαδή αν θέσουμε $s = t^2$ τότε το κλάσμα μετατρέπεται σε $\dfrac{1}{s(1-s)}$, το οποίο αναλύεται εύκολα ως εξής:

$$\frac{1}{s(1-s)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2}\,.$$

Άρα

$$I = \int \frac{1}{t^2(1-t^2)}\, dt = \int \frac{1}{t^2}\, dt + \int \frac{1}{1-t^2}\, dt = -\frac{1}{t} + \int \frac{1}{1-t^2}\, dt.$$

Για να βρούμε το τελευταίο ολοκλήρωμα κάνουμε ακόμα μία ανάλυση κλάσματος,

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t}\,.$$

Καταλήγουμε

$$I = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{1-t}\, dt + \frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{1+t}\, dt = -\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\cdot\ln|1-t| + \frac{1}{2}\cdot\ln|1+t| + c.$$

(Το προτελευταίο ολοκλήρωμα προκύπτει με αντικατάσταση $u = -t$.) Θέτοντας πίσω $t = \sin x$ έχουμε

$$I = \frac{1}{2}\cdot\left(\ln(1+\sin x) - \ln(1-\sin x) - \frac{2}{\sin x}\right) + c.$$

Τέλος υπολογίζουμε το J. Εδώ δεν χρειάζεται να αναλύσουμε το κλάσμα γιατί ο παρονομαστής αποτελείται μόνο από έναν όρο, το t^4.

$$J = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4}\, dt = \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^4}\, dt = \int \frac{1}{t^4}\, dt + \int \frac{2}{t^2}\, dt + \int 1\, dt = -\frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + c.$$

Αφού $t = \tan x$ προκύπτει

$$J = \tan x - \frac{2}{\tan x} - \frac{1}{3\tan^3 x} + c.$$

Άσκηση 2. Δίνεται $\rho \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $\rho > 1$ τότε

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho}\, dx = \frac{1}{\rho - 1}\,,$$

ενώ αν $\rho \le 1$ το πιο πάνω γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν ορίζεται.

Λύση.
Υποθέτουμε ότι $\rho > 1$ και θεωρούμε $R > 1$. Τότε

$$\int_1^R \frac{1}{x^\rho}\,dx = \int_1^R x^{-\rho}\,dx = \frac{x^{-\rho+1}}{-\rho+1}\Big|_1^R = \frac{1}{1-\rho}\cdot\left(R^{-\rho+1}-1\right) = \frac{1}{\rho-1}\cdot\left(1-\frac{1}{R^{\rho-1}}\right).$$

Επειδή $\rho > 1$ έχουμε $\lim\limits_{R\to\infty} R^{\rho-1} = \infty$ και συνεπώς

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^{\rho-1}} = 0.$$

Άρα

$$\lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^\rho}\,dx = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\rho-1}\cdot\left(1-\frac{1}{R^{\rho-1}}\right) = \frac{1}{\rho-1}\cdot(1-0) = \frac{1}{\rho-1}\,.$$

Καταλήγουμε ότι

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^\rho}\,dx = \frac{1}{\rho-1}\,.$$

Αν $\rho < 1$ τότε $1-\rho > 0$ και $\lim\limits_{R\to\infty} R^{-\rho+1} = +\infty$. Όπως πιο πάνω έχουμε

$$\int_1^R \frac{1}{x^\rho}\,dx = \frac{1}{1-\rho}\cdot\left(R^{-\rho+1}-1\right)$$

για κάθε $R > 1$ και άρα

$$\lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^\rho}\,dx = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{1-\rho}\cdot\left(R^{-\rho+1}-1\right) = +\infty.$$

Επομένως το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho}\,dx$ δεν ορίζεται για $\rho < 1$. (Κάποια συγγράμματα αναφέρουν $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho}\,dx = +\infty$ όταν $\rho < 1$.)

Τέλος αν $\rho = 1$,

$$\lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^\rho}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\ln(x)\Big|_1^R = \lim_{R\to\infty}\ln(R) = \infty.$$

Συνεπώς πάλι δεν ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho}\,dx$.

Άσκηση 3.

(i) Εξετάστε ποια από τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα ορίζονται και σε αυτή την περίπτωση υπολογίστε τα:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

(ii) Με βάση το πιο πάνω ερώτημα για ποια $\rho \in \mathbb{R}$ περιμένετε να ορίζεται το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\rho}\,dx;$$

Διατυπώστε και αποδείξτε τον ισχυρισμό σας. Όπου ορίζεται το ολοκλήρωμα υπολογίστε το.

Τι παρατηρείτε σε σχέση με το $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho}\,dx$ (Άσκηση 2);

Λύση.

(i) Για κάθε $r > 0$ έχουμε

$$\int_r^1 \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_r^1 = -1 + \frac{1}{r}$$

$$\int_r^1 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\,\Big|_r^1 = \ln 1 - \ln r = -\ln r$$

$$\int_r^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_r^1 x^{-1/2}\,dx = \frac{x^{1/2}}{1/2}\Big|_r^1 = 2\sqrt{x}\,\Big|_r^1 = 2(\sqrt{1} - \sqrt{r}) = 2 - 2\sqrt{r}.$$

.

Παίρνοντας το όριο όταν το r τείνει στο 0 από δεξιά έχουμε

$$\lim_{r\to 0^+}\left(-1 + \frac{1}{r}\right) = +\infty, \qquad \lim_{r\to 0^+}(-\ln r) = +\infty, \qquad \lim_{r\to 0^+}(2 - 2\sqrt{r})) = 2.$$

Άρα τα δύο πρώτα ολοκληρώματα $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ και $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ δεν ορίζονται, ενώ το τρίτο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ ορίζεται και είναι ίσο με 2.

(ii) Από το πιο πάνω ερώτημα βλέπουμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{x^\rho}\,dx$ δεν ορίζεται για $\rho = 1, 2$ ενώ ορίζεται για $\rho = 1/2$. Ισχυριζόμαστε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{x^\rho}\,dx$ ορίζεται αν και μόνο αν $\rho < 1$.

Παρατηρούμε ότι αυτό λειτουργεί συμπληρωματικά σε σχέση με το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho}\,dx$: σύμφωνα με την Άσκηση 2 το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho}\,dx$ ορίζεται αν και μόνο $\rho > 1$. (Για $\rho = 1$ δεν ορίζεται κανένα από αυτά τα ολοκληρώματα.)

Για να δείξουμε τον ισχυρισμό μας θεωρούμε $\rho \in \mathbb{R}$ με $\rho \neq 1$. (Όπως είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα το $\int_r^1 \frac{1}{x^\rho}\,dx$ δεν ορίζεται για $\rho = 1$.) Τότε για κάθε $r > 0$ έχουμε

$$\int_r^1 \frac{1}{x^\rho}\,dx = \int_r^1 x^{-\rho}\,dx = \frac{x^{-\rho+1}}{-\rho+1}\Big|_r^1 = \frac{1}{1-\rho}\cdot\left(1 - r^{1-\rho}\right).$$

Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$ για $\alpha > 0$ και $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$ για $\alpha < 0$. Επομένως αν $1 - \rho > 0$, δηλαδή αν $\rho < 1$, ισχύει $\lim_{r\to 0^+} r^{1-\rho} = 0$ και άρα

$$\lim_{r\to 0^+}\int_r^1 \frac{1}{x^\rho}\,dx = \lim_{r\to 0^+}\frac{1}{1-\rho}\cdot\left(1 - r^{1-\rho}\right) = \frac{1}{1-\rho},$$

Επομένως

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\rho}\,dx = \frac{1}{1-\rho}, \qquad \rho < 1.$$

Από την άλλη αν $1 - \rho < 0$, δηλαδή αν $\rho > 1$, ισχύει $\lim_{r\to 0^+} r^{1-\rho} = +\infty$ και άρα το $\int_0^1 \frac{1}{x^\rho}\,dx$ δεν ορίζεται. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.

Άσκηση 4. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(i) Αν ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R f(x)\,dx.$$

(ii) Δείξτε ότι το αντίστροφο του προηγούμενου ερωτήματος δεν ισχύει γενικά, δηλαδή μπορεί να υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο $\lim\limits_{R\to\infty}\displaystyle\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$ αλλά το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ να μην ορίζεται.

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση.

(i) Εφόσον ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ορίζονται τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\displaystyle\int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ και

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Τότε υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{R_1\to-\infty}\displaystyle\int_{R_1}^{c} f(x)\,dx$ και $\lim\limits_{R_2\to\infty}\displaystyle\int_{c}^{R_2} f(x)\,dx$. Παίρνουμε $R_2 = R$ και $R_1 = -R$ (δηλαδή θεωρούμε ότι $R_1 = -R_2$) και έχουμε από πιο πάνω

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{c} f(x)\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_{c}^{R} f(x)\,dx\\ &= \lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{R} f(x)\,dx\right)\\ &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

(ii) Για κάθε $R > 0$ έχουμε

$$\int_{-R}^{R}\frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int_{-R}^{R}\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1)\,\Big|_{-R}^{R} = \ln(R^2+1) - \ln(R^2+1) = 0,$$

άρα υπάρχει το όριο $\lim\limits_{R\to\infty}\displaystyle\int_{-R}^{R}\frac{2x}{x^2+1}\,dx$ και είναι ίσο με 0.

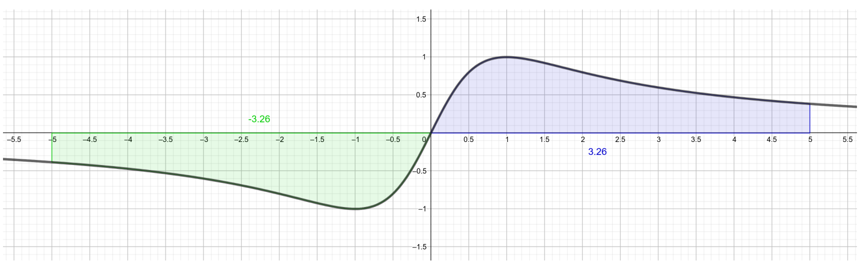
Από την άλλη για κάθε $c \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\int_{c}^{R}\frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1)\,\Big|_{c}^{R} = \ln(R^2+1) - \ln(c^2+1) \xrightarrow{R\to\infty} \infty.$$

Άρα δεν ορίζεται το $\displaystyle\int_{c}^{\infty}\frac{2x}{x^2+1}\,dx$ και επομένως ούτε το $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x}{x^2+1}\,dx$.

(Όμοια μπορεί να δείξει κανείς ότι $\lim\limits_{R\to-\infty}\displaystyle\int_{R}^{c}\frac{2x}{x^2+1}\,dx = -\infty$ και άρα επίσης δεν ορίζεται το $\displaystyle\int_{-\infty}^{c}\frac{2x}{x^2+1}\,dx$).

Σχήμα:



Πιο πάνω δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$. Αυτή είναι περιττή συνάρτηση, επομένως τα εμβαδά στην πράσινη και στην μπλε περιοχή είναι ίσα και στο ολοκλήρωμα προσμετρώνται με διαφορετικό πρόσημο. Με άλλα λόγια $\displaystyle\int_{-R}^{0}\frac{2x}{x^2+1}\,dx = -\int_{0}^{R}\frac{2x}{x^2+1}\,dx$, ειδικότερα έχουμε $\displaystyle\int_{-R}^{R}\frac{2x}{x^2+1}\,dx = 0$.

Από την άλλη το εμβαδόν που καθορίζεται από τον θετικό ημιάξονα Ox και τη γραφική παράσταση της f είναι άπειρο και γι' αυτό δεν ορίζεται το $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2x}{x^2+1}\,dx$. Παρατηρούμε επίσης ότι το άθροισμα $\displaystyle\lim_{R_1\to-\infty}\int_{R_1}^0 f(x)\,dx + \lim_{R_2\to\infty}\int_0^{R_2} f(x)\,dx$ οδηγεί στην απροσδιόριστη μορφή $\infty-\infty$.