Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

5ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Άσκηση 1. Θεωρούμε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$I = \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos x}\,dx \qquad \text{και} \qquad J = \int \frac{1}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x}\,dx.$$

(i) Να αναγάγετε τα I και J σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων με κατάλληλη αντικατάσταση.

(ii) Υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα I και J.

Άσκηση 2. Δίνεται $\rho \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $\rho > 1$ τότε

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho}\,dx = \frac{1}{\rho - 1}\,,$$

ενώ αν $\rho \le 1$ το πιο πάνω γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν ορίζεται.

Άσκηση 3.

(i) Εξετάστε ποια από τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα ορίζονται και σε αυτή την περίπτωση υπολογίστε τα:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

(ii) Με βάση το πιο πάνω ερώτημα για ποια $\rho \in \mathbb{R}$ περιμένετε να ορίζεται το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\rho}\,dx;$$

Διατυπώστε και αποδείξτε τον ισχυρισμό σας. Όπου ορίζεται το ολοκλήρωμα υπολογίστε το.

Τι παρατηρείτε σε σχέση με το $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho}\,dx$ (Άσκηση 2);

Άσκηση 4. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(i) Αν ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R f(x)\,dx.$$

(ii) Δείξτε ότι το αντίστροφο του προηγούμενου ερωτήματος δεν ισχύει γενικά, δηλαδή μπορεί να υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R f(x)\,dx$ αλλά το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ να μην ορίζεται.

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}$.