Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

4ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Άσκηση 1. Βρείτε τα εξής αόριστα ολοκληρώματα:

$$I = \int \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx \qquad J = \int \frac{x}{(x+1)(x-2)}\,dx.$$

Λύση.

Το πολυώνυμο x^2+2x-3 έχει δύο πραγματικές ρίζες, τις $x=1$ και $x=-3$, επομένως $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$. Αναλύουμε το κλάσμα $1/(x^2+2x-3)$ σε πιο απλά κλάσματα:

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}\ .$$

Έχουμε $A(x+3)+B(x-1) = Ax+3A+Bx-B = (A+B)x+3A-B$. Προκύπτει το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} A+B&=0\\ 3A-B&=1. \end{aligned}$$

Τότε $B=-A$ και

$$3A-(-A)=1 \iff 4A=1 \iff A=\frac{1}{4}.$$

Άρα

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+3}.$$

Συνεπώς

$$I = \frac{1}{4}\cdot\int\frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{4}\cdot\int\frac{1}{x+3}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\ln|x-1| - \frac{1}{4}\cdot\ln|x+3| + c.$$

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα ο παρονομαστής είναι παραγοντοποιημένος. Απαλείφουμε τον x από τον αριθμητή με τον εξής απλό τρόπο,

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)} = \frac{x+1}{(x+1)(x-2)} - \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x+1)(x-2)}\ .$$

Αναλύουμε το τελευταίο κλάσμα,

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2}\ .$$

Άρα

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}$$

και συνεπώς

$$J = \frac{2}{3}\cdot\int\frac{1}{x-2}\,dx + \frac{1}{3}\cdot\int\frac{1}{x+1}\,dx = \frac{2}{3}\cdot\ln|x-2| + \frac{1}{3}\cdot\ln|x+1| + c.$$

Άσκηση 2. Βρείτε τα εξής αόριστα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+4}\,dx \qquad I_2 = \int \frac{1}{3x^2+1} \qquad I_3 = \int \frac{1}{x^2-4x+7}\,dx.$$

Λύση.
Έχουμε

$$\frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x/2)^2+1}\,.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = x/2$ και έχουμε $dx = 2du$. Οπότε

$$I_1 = \frac{1}{4}\cdot\int\frac{1}{u^2+1}\cdot 2\,du = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{u^2+1}\,du = \arctan(u)+c = \frac{1}{2}\cdot\arctan(x/2)+c.$$

Σχόλιο. Στο πιο πάνω ολοκλήρωμα (όπως και αρκετά επόμενα) θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε κατευθείαν τον τύπο

$$\int\frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\cdot\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

όπου $a\neq 0$.

Σχετικά με το δεύτερο ολοκλήρωμα,

$$\frac{1}{3x^2+1} = \frac{1}{(\sqrt{3}x)^2+1}\,.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = \sqrt{3}x$ και έχουμε $dx = 1/\sqrt{3}du$. Οπότε

$$I_2 = \int\frac{1}{(\sqrt{3}x)^2+1}\,dx = \int\frac{1}{u^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\,du = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\arctan(u)+c = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\arctan(\sqrt{3}x)+c.$$

Τέλος στο τρίτο ολοκλήρωμα παρατηρούμε αρχικά ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου x^2-4x+7 είναι αρνητική, επομένως μπορούμε να το φέρουμε στη μορφή $(ax-b)^2+c^2$ ή πιο απλά $(x-b)^2+c^2$ γιατί ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου είναι η μονάδα. Έχουμε

$$x^2-4x+7 = x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2+3 = (x-2)^2+3.$$

Επομένως

$$I_3 = \int\frac{1}{(x-2)^2+3}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\int\frac{1}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = \dfrac{x-2}{\sqrt{3}}$ και έχουμε $dx = \sqrt{3}du$. Άρα

$$I_3 = \frac{1}{3}\cdot\int\frac{1}{u^2+1}\cdot\sqrt{3}\,du = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\arctan(u)+c = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right)+c.$$

Άσκηση 3. Βρείτε τα εξής αόριστα ολοκληρώματα:

$$I = \int\frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx \qquad J = \int\frac{x+5}{4x^2+4x+10}\,dx.$$

Λύση.
Στο πρώτο ολοκλήρωμα παρατηρούμε ότι το τριώνυμο x^2+2x+2 έχει αρνητική διακρίνουσα και ότι

$$x^2+2x+2 = x^2+2x+1+1 = (x+1)^2+1.$$

Επομένως

$$I = \int\frac{x+1}{(x+1)^2+1}\,dx.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = (x+1)^2$ οπότε $du = 2(x+1)dx$. Επομένως

$$I = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{u+1}\,du = \frac{1}{2}\cdot\ln|u+1|+c = \frac{1}{2}\cdot\ln((x+1)^2+1)+c = \frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+2x+2)+c.$$

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα βλέπουμε πάλι ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου $4x^2 + 4x + 10$ είναι αρνητική και πως

$$4x^2 + 4x + 10 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x + 1 + 9 = (2x + 1)^2 + 9.$$

Άρα

$$J = \int \frac{x+5}{(2x+1)^2+9}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x+10}{(2x+1)^2+9}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x+1+9}{(2x+1)^2+9}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x+1}{(2x+1)^2+9}\, dx \;+\; \frac{1}{2} \cdot \int \frac{9}{(2x+1)^2+9}\, dx.$$

Συμβολίζουμε τα πιο πάνω ολοκληρώματα με J_1 και J_2 αντίστοιχα και έχουμε

(1) $$J = \frac{1}{2} \cdot (J_1 + J_2)$$

Υπολογίζουμε το κάθε ένα ολοκλήρωμα ξεχωριστά. Στο J_1 εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = (2x+1)^2$, οπότε $du = 2(2x+1) \cdot 2dx = 4(2x+1)dx$. Επομένως

$$J_1 = \int \frac{2x+1}{(2x+1)^2+9}\, dx = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{u+9}\, du = \frac{1}{4} \cdot \ln|u+9| + c_1 = \frac{1}{4} \cdot \ln((2x+1)^2+9) + c_1.$$

Υπολογίζουμε το J_2,

$$J_2 = \int \frac{9}{(2x+1)^2+9} = \int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{3}\right)^2 + 1}\, dx.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = \dfrac{2x+1}{3}$ και έχουμε $du = \dfrac{2}{3}dx$ ή αλλιώς $dx = \dfrac{3}{2}du$. Άρα

$$J_2 = \int \frac{1}{u^2+1} \cdot \frac{3}{2}\, du = \frac{3}{2} \cdot \arctan(u) + c_2 = \frac{3}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{3}\right) + c_2.$$

Από την (1) προκύπτει

$$J = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \ln((2x+1)^2+9) + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{3}\right) + c$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \ln(4x^2+4x+10) + \frac{3}{4} \cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{3}\right) + c.$$

Άσκηση 4. Βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{1}{(x+3)(x^2+x+1)}\, dx.$$

Λύση.
Αρχικά αναλύουμε το κλάσμα. Επειδή η διακρίνουσα του πολυωνύμου $x^2 + x + 1$ είναι αρνητική έχουμε

$$\frac{1}{(x+3)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Μετά από πράξεις βρίσκουμε $C = 2/7$, $B = -1/7$ και $A = 1/7$. Άρα

$$\frac{1}{(x+3)(x^2+x+1)} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{x+3} - \frac{1}{7} \cdot \frac{x-2}{x^2+x+1}.$$

Συμβολίζουμε με I το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα. Τότε

$$I = \frac{1}{7} \cdot \int \frac{1}{x+3}\, dx - \frac{1}{7} \cdot \int \frac{x-2}{x^2+x+1}\, dx.$$

Συμβολίζουμε τα τελευταία δύο ολοκληρώματα με I_1 και I_2 αντίστοιχα, έτσι που

$$I = \frac{1}{7} \cdot I_1 - \frac{1}{7} \cdot I_2.$$

Έχουμε

$$I_1 = \int \frac{1}{x+3}\, dx = \ln|x+3| + c_1.$$

Σχετικά με το I_2 έχουμε

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = (x+1/2)^2 + 3/4.$$

Άρα

$$I_2 = \int \frac{x-2}{(x+1/2)^2 + 3/4}\, dx = \int \frac{x+1/2}{(x+1/2)^2+3/4}\, dx - \frac{5}{2} \cdot \int \frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}\, dx.$$

Συμβολίζουμε τα τελευταία δύο ολοκληρώματα με I_3 και I_4 αντίστοιχα, έτσι που $I_2 = I_3 - (5/2) \cdot I_4$. Για τον υπολογισμό του I_3 εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = (x+1/2)^2$ οπότε $du = 2(x+1/2)dx$. Άρα

$$I_3 = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{u+3/4}\, du = \frac{1}{2} \cdot \ln|u+3/4| + c_2 = \frac{1}{2} \cdot \ln((x+1/2)^2+3/4) + c_2 = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+x+1) + c_2.$$

Για το I_4 έχουμε

$$I_4 = \int \frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}\, dx = \frac{4}{3} \cdot \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (x+1/2)\right)^2 + 1}\, dx.$$

Με αντικατάσταση $u = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (x+1/2)$ προκύπτει $du = \frac{2}{\sqrt{3}}\, dx$ και άρα

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \int \frac{1}{u^2+1}\, du = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan(u) + c_3 \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (x+1/2)\right) + c_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c_3. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε

$$I_2 = I_3 - \frac{5}{2} \cdot I_4 = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+x+1) - \frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c_4$$

και

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{7} \cdot I_1 - \frac{1}{7} \cdot I_2 \\ &= \frac{1}{7} \cdot \ln|x+3| - \frac{1}{14} \cdot \ln(x^2+x+1) + \frac{5\sqrt{3}}{21} \cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c. \end{aligned}$$