Δείχνουμε ότι $n+1 < 2^{n+1}$.

Υπόθεση

Έχουμε $n+1 < 2^n + 1$ $(n < 2^n)$

$\leq 2^n + 2^n$ $(1 \leq 2^n)$

$= 2 \cdot 2^n$

$= 2^{n+1}$

Άρα $n+1 < 2^{n+1}$.

Από Αρχή Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

<u>Ορολογία:</u>

- Το βήμα όπου δείχνουμε πως το 0 έχει την ιδιότητα P ονομάζεται <u>βάση</u> <u>της</u> <u>επαγωγής</u>.
- Η μετάβαση από το n στο $n+1$ ονομάζεται <u>επαγωγικό</u> <u>βήμα</u>.
- Η υπόθεση ότι το n έχει την ιδιότητα P ονομάζεται <u>επαγωγική υπόθεση</u>.

<u>Παραδείγματα (Συνέχεια)</u>

2) Δείξτε ότι ο αριθμός $4^{n+1} - 1$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 3 για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Βάση της επαγωγής:

$n = 0$ $\quad 4^{n+1} - 1 = 4^{0+1} - 1 = 4 - 1 = 3$ ✓

Επαγωγικό Βήμα:

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι ο αριθμός $4^{n+1} - 1$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 3.

(Επαγωγική Υπόθεση)
Ε.Υ.

Πρέπει να δείξουμε ότι ο αριθμός $4^{(n+1)+1} - 1$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 3.

Έχουμε $4^{(n+1)+1} - 1 = 4^{n+2} - 1$

$= 4 \cdot 4^{n+1} - 1$

Από Ε.Υ. έχουμε $4^{n+1} - 1 = 3k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$.
$4^{n+1} = 3k + 1$

Άρα $4 \cdot 4^{n+1} - 1 = 4 \cdot (3k+1) - 1$

$= 12k + 4 - 1$

$= 12k + 3$

$= 3 \cdot (4k+1)$

$= 3 \cdot k'$ όπου $k' = 4k + 1 \in \mathbb{N}$

Επομένως ο $4^{(n+1)+1} - 1$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 3.

Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Σχόλιο: Πολλές φορές η βάση της Επαγωγής ξεκινάει από το 1 ή 2 ή 3 κ.ο.κ. αντί από το 0.
Τότε στην Επαγωγική Υπόθεση θεωρούμε ότι το n είναι αντίστοιχα $\geq$ 1 ή 2 ή 3 κ.ο.κ.
Το συμπέρασμα είναι ότι η ιδιότητα P ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ που είναι $\geq$ 1 ή 2 ή 3 κ.ο.κ. αντίστοιχα

Με άλλα λόγια έχουμε το εξής:

Αρχή Επαγωγής (Παραλλαγή)

Θεωρούμε έναν φυσικό αριθμό n_0 και P μια ιδιότητα που αναφέρεται σε φυσικούς αριθμούς. Υποθέτουμε ότι ισχύουν τα εξής:

α) Το n_0 έχει την ιδιότητα P.

β) Αν κάποιο $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$ έχει την ιδιότητα P τότε και το $n+1$ έχει την ιδιότητα P.

Τότε κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$ έχει την ιδιότητα P.

Παράδειγμα: n το πλήθος προσθεταίων

Δείξτε ότι $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

για κάθε $n \geq 1$.

Το δείχνουμε με επαγωγή.

<u>Βάση:</u> $n = 1$

Έχουμε για προσθεταίο μόνο το 1.

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1\cdot(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \checkmark$$

<u>Επαγωγικό Βήμα:</u>

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 1$ ισχύει $1+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ (Ε.Υ.)

Δείχνουμε ότι:

$$1+\dots+n+n+1 = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}.$$

Έχουμε

$$1+\dots\overset{n}{\swarrow}+n+1$$

$$= (1+\dots+n)+n+1$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + n+1 \circledast \quad \text{(Ε.Υ.)}$$

$$= \frac{n^2+n+2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2+n+2n+2}{2}$$

$$= \frac{n^2+3n+2}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Πιο απλά:

$$\circledast\ \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Επομένως ισχύει το ζητούμενο
για κάθε $n \geq 1$

β' τρόπος για το τελευταίο βήμα:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)n}{2} + \frac{(n+1)\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}}$$

$$= 1+\dots+n+n+1 \;.$$

Ε.Υ. $\leftarrow$

Η ανισότητα Bernoulli:

Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$
και για κάθε $a > -1$ ισχύει

$$(1+a)^n \geq 1+na \;.$$

Απόδειξη:

Για $n=1$: $(1+a)^n = (1+a)^1 = 1+a$

$1+n\cdot a = 1+1\cdot a = 1+a$

$1+a \geq 1+a$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 1$
ισχύει $(1+a)^n \geq 1+na$.

Δείχνουμε $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)\cdot a$.

Έχουμε $(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n$

$$\geq (1+a)\cdot(1+na)$$

Χρησιμοποιήσαμε την Ε.Υ. και ότι $a > -1$ άρα $1+a > 0$.

$$(1+a)(1+na) = 1 + na + a + na^2$$
$$= 1 + (n+1)a + na^2$$
$$\geq 1 + (n+1)a.$$

Άρα $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$.

Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Το διώνυμο του Νεύτωνα

Αν $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 1$ ορίζουμε

$$n! = \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot n}_{\text{αυξάνουμε κατά } 1}$$

Επίσης ορίζουμε $0! = 1$

Το $n!$ διαβάζεται "νι παραγοντικό".

Παραδείγματα:

$1! = 1 \qquad 2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \qquad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$$5! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}_{4!} \cdot 5 = 4! \cdot 5 = 24 \cdot 5$$
$$= 120$$

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

Τέλος ορίζουμε

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

$0 \leq k \leq n$

$k, n \in \mathbb{N}$

Το $\binom{n}{k}$ διαβάζεται

«ν ανά κάππα».

Παραδείγματα:

1) $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = \frac{5!}{2!\cdot 3!}$

$= \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot \cancel{1\cdot 2\cdot 3}} = \frac{4\cdot 5}{2} = 2\cdot 5 = 10$

Πιο απλά: $\frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{\cancel{3!}\cdot 4\cdot 5}{2!\cdot\cancel{3!}} = \frac{4\cdot 5}{2} = 10$

2) $\binom{17}{1} = \frac{17!}{1!\cdot 16!} = \frac{\cancel{16!}\cdot 17}{1\cdot\cancel{16!}} = 17$

3) $\binom{17}{0} = \frac{\cancel{17!}}{0!\cdot\cancel{17!}} = \frac{1}{0!} = 1$

4) $\binom{17}{17} = \frac{\cancel{17!}}{\cancel{17!}\cdot(17-17)!} = \frac{1}{0!} = 1$

Γενικά ισχύει $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

και $\binom{n}{1} = n$.

<u>Θεώρημα:</u> (Διώνυμο Νεύτωνα)

$a, b \neq 0$

Για κάθε φυσικό $n \geq 1$ και κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(a+b)^n =$$

$$= \binom{n}{0} \cdot a^n b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

<u>Παραδείγματα:</u>

$n = 2$:

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 \cdot b^2$$

$$= 1 \cdot a^2 \cdot 1 + 2 \cdot a \cdot b + 1 \cdot 1 \cdot b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$n = 3$:

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b^1 +$$

$$+ \binom{3}{2} a^1 \cdot b^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3$$

$$= 1 \cdot a^3 \cdot b^0 + 3a^2 b + 3ab^2 + 1 \cdot 1 \cdot b^3$$

$$= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

Εφαρμογές

1) Για $a=b=1$ τότε για κάθε $n \geq 1$ έχουμε:

$$(a+b)^n = (1+1)^n = 2^n$$

$$a^k \cdot b^{n-k} = 1^k \cdot 1^{n-k} = 1$$

για κάθε $k = 0, 1, \ldots n$.

Άρα $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$

2) Βρείτε ποιος αριθμός είναι ο

$$A = \binom{45}{0} - \binom{45}{1} + \binom{45}{2} - \ldots - \binom{45}{45}$$

Λύση:

$$A = \binom{45}{0} 1^{45} \cdot (-1)^0 + \binom{45}{1} 1^{44} \cdot (-1)^1$$

$$+ \binom{45}{2} \cdot 1^{43} \cdot (-1)^2 + \ldots + \binom{45}{45} 1^0 \cdot (-1)^{45}$$

$$= (1 + (-1))^{45}$$

(Διώνυμο Νεύτωνα $a=1, b=-1$
$n=45$)

$$= 0^{45} = 0.$$