1ο Κεφάλαιο – Πραγματικοί αριθμοί.

Σύνολα – συμβολισμοί:

$A = \{ x : \text{μια ιδιότητα του } x \}$

ή $A = \{ x \mid \text{μια ιδιότητα του } x \}$

ή $A = \{ x \in B \mid \text{μια ιδιότητα του } x \}$

Αυτό σημαίνει ότι το A είναι το σύνολο όλων των x (ή όλων των x που ανήκουν στο B) που έχουν αυτή την ιδιότητα.

Επίσης γράφουμε $A = \{ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \}$

Αυτό σημαίνει ότι το A αποτελείται από τα αντικείμενα $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$.

$\emptyset$ = το κενό σύνολο $\rightsquigarrow$ δεν περιέχει στοιχεία.

$A \subseteq B$ → το A είναι υποσύνολο του B δηλαδή κάθε στοιχείο του A είναι στοιχείο του B

Ισχύει ότι $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ και $B \subseteq A$

Δηλαδή δύο σύνολα είναι ίσα αν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

Ισχύει $\emptyset \subseteq B$ για κάθε σύνολο B.

Παραδείγματα:

1) $A = \{4, 5, \frac{3}{7}\}$

$B = \{0, -1, 4, 8, 5, \frac{3}{7}\}$

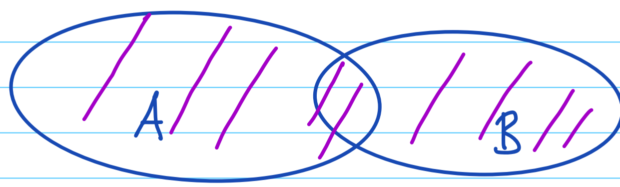
Άρα $A \subseteq B$

2) $A = \{5, \frac{1}{2}\}$ $B = \{5, 8, 9\}$

$A \nsubseteq B$ (το A δεν είναι υποσύνολο του B)

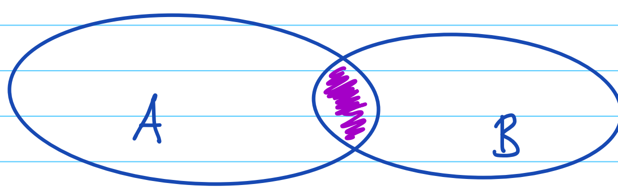
Πράξεις με σύνολα:

Ένωση: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ή } x \in B\}$



$A \cup B$

Τομή: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ και } x \in B\}$



$A \cap B$

Διαφορά: $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ και } x \notin B\}$

$A \setminus B$

Μαθηματικά σύμβολα:

$\Rightarrow$ σημαίνει συνεπάγεται

$\Leftrightarrow$ σημαίνει ισοδυναμία

$\forall$ σημαίνει για κάθε

$\exists$ σημαίνει υπάρχει

Το "τέτοιο ώστε" συμβολίζεται με : .

Παραδείγματα:

1) $A = \{0, -1, 8\}$

$B = \{1, 0, 8, 6\}$

$A \cup B = \{0, 1, -1, 8, 6\}$

$A \cap B = \{0, 8\}$

$A \setminus B = \{-1\}$ $\quad B \setminus A = \{1, 6\}$

2) $A = \{1, 2, 3\}$ $\quad B = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \subseteq B$ $\quad A \cup B = B = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \cap B = A = \{1, 2, 3\}$

$A \setminus B = \emptyset$ $\quad B \setminus A = \{4\}$

Φυσικοί Αριθμοί:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots \}$

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Ακέραιοι αριθμοί:

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Ρητοί αριθμοί:

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} \text{ και } n \neq 0 \right\}$

Παραδείγματα ρητών:

$\frac{1}{2}, \quad -\frac{3}{5}, \quad \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \quad 0 = \frac{0}{1}$

$\frac{23}{10} = 2,3$, όλοι οι δεκαδικοί αριθμοί (με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων)

$\frac{1}{3} = 0,3333\ldots$ $\qquad k = \frac{k}{1}$

όλοι οι ακέραιοι είναι ρητοί αριθμοί

όλοι οι φυσικοί είναι ρητοί αριθμοί.

όλοι οι φυσικοί είναι ακέραιοι αριθμοί.

Ισχύει δηλαδή $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

Οι πραγματικοί αριθμοί

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{R}$ και πάνω σε αυτό ορίζονται δύο πράξεις:
a) η πρόσθεση $+$
b) ο πολλαπλασιασμός $\cdot$

έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι γνωστές ιδιότητες,
π.χ. η προσεταιριστική ιδιότητα
η επιμεριστική ιδιότητα
η ύπαρξη αντίθετου στοιχείου κ.τ.λ.

Επιπλέον έχουμε και μια σχέση διάταξης $\leq$ με τις συνηθισμένες ιδιότητες:
π.χ. • για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει $a \leq b$ ή $b \leq a$

• για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$
αν $a \leq b$ και αν $b \leq c$ τότε $a \leq c$

• για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$
αν $a < b$ και αν $0 < c$
τότε $a \cdot c < b \cdot c$.

Επίσης το σύνολο των ρητών αριθμών περιέχεται στο $\mathbb{R}$, επομένως

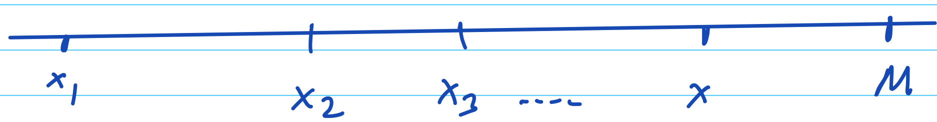
$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Τέλος στο $\mathbb{R}$ έχουμε την ιδιότητα της "ακολουθιακής πληρότητας" (ανεπίσημη διατύπωση):

Αν επιλέξουμε πραγματικούς αριθμούς $x_1, x_2, x_3, \ldots$ με $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ και αν έχουμε $x_1 < M$, $x_2 < M$, $x_3 < M, \ldots$ όπου $M \in \mathbb{R}$

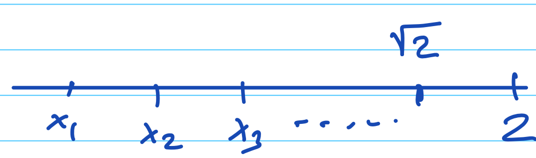
τότε οι αριθμοί x_1, x_2, x_3 "προσεγγίζουν" κάποιον αριθμό $x \in \mathbb{R}$.
(Αναγκαστικά θα ισχύει $x \leq M$)

Σχήμα:



Παράδειγμα:

$x_1 = 1$
$x_2 = 1,4$
$x_3 = 1,41$
$x_4 = 1,414$
$x_5 = 1,4142$
$x_6 = 1,41421$



Μερικά βασικά θεωρήματα:

Θεώρημα: (Η Αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{R}$)

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$
με $x < n$.

Π.χ. $8956{,}12358 = x$

$8957 = n$.

- Η Αρχή του Ελαχίστου στο $\mathbb{N}$:

Ορισμός: Δίνεται ένα $A \subseteq \mathbb{R}$.

Ένα $a \in \mathbb{R}$ ονομάζεται ελάχιστο του A
συμβολικά $a = \min A$
αν ισχύουν τα εξής:

a) $a \leq x$ για κάθε $x \in A$

β) $a \in A$.

Όμοια ορίζεται η έννοια του μέγιστου του A, συμβολικά $a = \max A$.

Τα $\min A$ και $\max A$ μπορεί να μην υπάρχουν πάντα.

Παραδείγματα:

1) $A = \{ \frac{1}{2}, 2, 3 \}$

$\min A = \frac{1}{2}$ $\quad \max A = 3$

2) $A = \{2022\}$

$\min A = 2022 = \max A$

3) $A = (0, 2]$

$\max A = 2$

Δεν υπάρχει το $\min A$.

Γιατί για κάθε $a \in A$ έχουμε $\frac{a}{2} \in A$ και $\frac{a}{2} < a$.

4) $A = \mathbb{N}$ $\quad \min A = 0$

Δεν υπάρχη το $\max A$.

Γιατί αν $a \in A$ ισχύει $a+1 \in A$ και $a < a+1$.

<u>Θεώρημα:</u> (Αρχή Ελαχίστου στο $\mathbb{N}$)

Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

<u>Π.χ.</u> 1) $A = (1, 50] \cap \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$

$\min A = 2$

2) $A = \{2k+9 \mid k \in \mathbb{N}\}$

$= \{9, 11, 13, \ldots\}$

$\min A = 9$ δεν υπάρχει το $\max A$.

Θεώρημα: (Αρχή Επαγωγής)

Θεωρούμε ότι έχουμε μια ιδιότητα P που αναφέρεται σε φυσικούς αριθμούς.

Υποθέτουμε ότι ισχύουν τα εξής:
α) Το 0 έχει την ιδιότητα P.
β) Αν κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχει την ιδιότητα P τότε και το $n+1$ έχει την ιδιότητα P.

Τότε κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχει την ιδιότητα P.

Σχόλιο: Τα τρία προηγούμενα Θεωρήματα αποδεικνύονται με βάση τις ιδιότητες που έχουμε δεχθεί για το $\mathbb{R}$.

Η Αρχή της Επαγωγής και η Αρχή του Ελαχίστου στο $\mathbb{N}$ είναι ισοδύναμες προτάσεις.

Παραδείγματα:

1) Δείξτε ότι $n < 2^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Με επαγωγή. (Εδώ "το $n \in \mathbb{N}$ έχει την ιδιότητα P" σημαίνει ότι $n < 2^n$)

Για $n = 0$ $2^0 = 1$, άρα $0 < 2^0$

Υποθέτουμε ότι κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ικανοποιεί $n < 2^n$.

Δείχνουμε ότι $n+1 < 2^{n+1}$. Υπόθεση

Έχουμε $n+1 < 2^n + 1$ $(n < 2^n)$

$\leq 2^n + 2^n$ $(1 \leq 2^n)$

$= 2 \cdot 2^n$

$= 2^{n+1}$

Άρα $n+1 < 2^{n+1}$.

Από Αρχή Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.