Ορισμός (Πολυώνυμα Taylor):

Δίνεται ένα ανοικτό διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση $f: I \to \mathbb{R}$ που είναι n-φορές παραγωγίσιμη, όπου $n \in \mathbb{N}$. Δίνεται επίσης ένα $x_0 \in I$.

Το πολυώνυμο Taylor της f στο x_0 τάξης n συμβολίζεται με P_n^{f, x_0} και ορίζεται ως εξής:

$$P_n^{f,x_0}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Με τον συμβολισμό Σ έχουμε:

$$\boxed{P_n^{f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$$

Όταν η f και το x_0 είναι σαφή συμβολίζουμε το P_n^{f,x_0} πιο απλά με P_n.

Παρατηρήσεις: 1) $P_0(x) = f(x_0)$, $x \in \mathbb{R}$ (σταθερό πολυώνυμο)

2) Βαθμός $(P_n) \leq n$

Παραδείγματα Πολυωνύμων Taylor για συγκεκριμένες συναρτήσεις

1) $f(x) = e^x, \; x \in \mathbb{R}, \; x_0 = 0.$

Ισχύει $f^{(n)}(x) = e^x, \; x \in \mathbb{R}.$

(Αυστηρή απόδειξη με επαγωγή.
$\longrightarrow$ Φυλλάδια Ασκήσεων)

Άρα $f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$

$P_0(x) = f(0) = 1$

$$P_1(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot (x-0)^1$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} \cdot x = 1 + x$$

$$P_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot (x-0)^1 + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2$$

$$= P_1(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$P_3(x) = P_2(x) + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3!}x^3$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Γενικά ισχύει:

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R}.$$

2) $f(x) = \cos x, \ x \in \mathbb{R}, \quad x_0 = 0.$

$f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x$

$f^{(3)} = +\sin x, \quad f^{(4)}(x) = \cos x$

Στο 0: $f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1$

$f^{(3)}(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = 1$

$f(0) = 1$

Επομένως: $P_0(x) = f(0) = \cos 0 = 1$

$$P_1(x) = P_0(x) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0)^1 = 1 + \frac{0}{1!} \cdot x$$

$$= 1$$

Βλέπουμε ότι $P_1(x) = P_0(x), \ x \in \mathbb{R}.$

$$P_2(x) = P_1(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2$$

$$= 1 + \frac{(-1)}{2!} x^2 = 1 - \frac{x^2}{2!}.$$

$P_3(x) = P_2(x)$ γιατί $f^{(3)}(0) = 0$.

$$= 1 - \frac{x^2}{2!}$$

$$P_4(x) = P_3(x) + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} \cdot (x-0)^4$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{4!} \cdot x^4$$

Μνημονικός κανόνας:

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots$$

3) $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, $x_0 = 0$

$f'(x) = \cos x$ $\quad f''(x) = -\sin x$

$f^{(3)}(x) = -\cos x$ $\quad f^{(4)}(x) = +\sin x$

Στο 0: $f(0) = 0$

$f'(0) = 1$ $\quad f''(0) = 0$

$f^{(3)}(0) = -1$ $\quad f^{(4)}(0) = 0$

$$P_0(x) = f(0) = 0$$

$$P_1(x) = 0 + \frac{1}{1!}(x-0)^1 = x$$

$$P_2(x) = P_1(x) + \frac{0}{2!} \cdot (x-0)^2 = P_1(x) = x$$

$$P_3(x) = P_2(x) + \frac{(-1)}{3!}(x-0)^3 = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$P_4(x) = P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} \quad \text{γιατί } f^{(4)}(0) = 0.$$

$$P_5(x) = P_4(x) + \frac{1}{5!}(x-0)^5$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Μνημονικός κανόνας:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

4) $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1,1)$, $x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = +\frac{2}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{(1+x)^4}$$

Στο $x=0$:

$$f(0) = \ln 1 = 0$$

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1$$

$$f^{(3)}(0) = 2! \quad f^{(4)}(0) = -3!$$

$$P_0(x) = f(0) = 0$$

$$P_1(x) = 0 + \frac{1}{1!} \cdot x = x$$

$$P_2(x) = x + \frac{(-1)}{2!} \cdot x^2 = x - \frac{x^2}{2!}$$

$$P_3(x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2!}{3!} x^3$$

$$= x - \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{3} x^3 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$P_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{(-3!)}{4!} \cdot x^4$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{3!}{4!} x^4$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

Μνημονικός κανόνας:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

Εκτίμηση της προσέγγισης με πολυώνυμο Taylor

Ορισμός: Δίνεται ένα ανοικτό διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ και μια συνάρτηση $f: I \to \mathbb{R}$ η οποία είναι n – φορές παραγωγίσιμη, όπου $n \in \mathbb{N}$.

Η διαφορά $f(x) - P_n^{f,x_0}(x)$ ονομάζεται υπόλοιπο Taylor της f στο x_0 τάξης n υπολογισμένο στο x.

Πιο απλά: υπόλοιπο Taylor στο x

Συμβολίζεται με $R_n^{f,x_0}(x)$

Δηλαδή
$$\boxed{R_n^{f,x_0}(x) = f(x) - P_n^{f,x_0}(x)}$$

Πιο απλά συμβολίζουμε το R_n^{f,x_0} με R_n.

Θεώρημα: (Μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor)

Δίνεται ένα ανοικτό διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ και $f: I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-φορές παραγωγίσιμη.

Τότε για κάθε $x \in I$ υπάρχει ξ ανάμεσα στο x_0 και στο x έτσι ώστε

$$\boxed{R_n^{f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}.$$

Εφαρμογές:

1) (Σεπτ. 2022)

Να δειχθεί ότι:

$$\left|\sqrt{e} - \left(1+\frac{1}{2\cdot 1!}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}+\frac{1}{2^3\cdot 3!}\right)\right| \le \frac{\sqrt{3}}{2^4\cdot 4!}$$

Λύση:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

Με p_n συμβολίζουμε το πολυώνυμο Taylor της f στο $x_0=0$.

Γνωρίζουμε ότι: $p_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$
για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $f(\frac{1}{2})=\sqrt{e}$

και $p_3(\frac{1}{2})=1+\frac{1}{2\cdot 1!}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}+\frac{1}{2^3\cdot 3!}$

Επομένως πρέπει να δείξουμε ότι

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-p_3\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le \frac{\sqrt{3}}{2^4\cdot 4!}$$

Από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor υπάρχει $\xi\in(0,\frac{1}{2})$

έτσι ώστε $R_3(\frac{1}{2}) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot (x-0)^4$

όπου $x = \frac{1}{2}$

και $R_3(\frac{1}{2})$ = υπόλοιπο Taylor στο $x = \frac{1}{2}$.

Πρέπει να δείξουμε ότι

$$|f(\tfrac{1}{2}) - p_3(\tfrac{1}{2})| = |R_3(\tfrac{1}{2})| \leq \frac{\sqrt{3}}{2^4 \cdot 4!}$$

Έχουμε $|R_3(\frac{1}{2})| = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{4!} \cdot \frac{1}{2^4}$

$f^{(4)}(x) = e^x$ άρα $f^{(4)}(\xi) = e^\xi$

$0 < \xi < \frac{1}{2}$, άρα $e^\xi < e^{1/2} < 3^{1/2}$

$2 < e < 3$

Επομένως $|R_3(\frac{1}{2})| < \frac{3^{1/2}}{4!} \cdot \frac{1}{2^4}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2^4 \cdot 4!}$$

2) Ισχύει $1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} = \frac{79}{48}$

Να δειχθεί ότι το $\frac{79}{48}$ προσεγγίζει το $\sqrt{e}$ με ακρίβεια τουλάχιστον δύο ψηφίων στο δεκαδικό ανάπτυγμα.

Λύση: Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\left|\sqrt{e}-\frac{79}{48}\right| < 10^{-2}.$$

Γνωρίζουμε ότι $\left|\sqrt{e}-\frac{79}{48}\right| < \frac{\sqrt{3}}{2^4\cdot 4!}$

από την προηγούμενη άσκηση.

$$\frac{\sqrt{3}}{2^4\cdot 4!} < \frac{3}{16\cdot 24} = \frac{1}{16\cdot 8} = \frac{1}{128} < \frac{1}{100}$$

Άρα $\left|\sqrt{e}-\frac{79}{48}\right| < \frac{\sqrt{3}}{2^4\cdot 4!} < \frac{1}{100}$.

Όντως: $\frac{79}{48} = \underline{1,64}58333\ldots$

$$\sqrt{e} \simeq \underline{1,64}8212$$