Άσκηση: (Θέμα Ιαν. 2020)

Να δειχθεί ότι

$$\left| \cos(x^2) - \left(1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!}\right) \right| \le \frac{x^{12}}{6!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση:

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left| \cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) \right| \le \frac{x^6}{6!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν το δείξουμε αυτό τότε αντικαθιστούμε το x με το x^2 και έχουμε το ζητούμενο.

Θεωρούμε το πολυώνυμο Taylor P_5 5ης τάξης στο $x_0 = 0$ της συνάρτησης $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

Τότε $P_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$, $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως

$$\left| \cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) \right| = |f(x) - P_5(x)|$$

$= |R_5(x)|$

όπου R_5 = το υπόλοιπο Taylor $5^{ης}$ τάξης

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$$|R_5(x)| \le \frac{x^6}{6!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Θεωρούμε $x \in \mathbb{R}$.

Από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor υπάρχει ξ ανάμεσα στο 0 και στο x με

$$R_5(x) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(x-0)^6.$$

Ισχύει $|f^{(6)}(\xi)| \le 1$

γιατί η f είναι η συνάρτηση συνημίτονο.

Άρα $$|R_5(x)| = \frac{|f^{(6)}(\xi)|}{6!} \cdot |x^6|$$

$$\le \frac{1}{6!} \cdot x^6$$

που είναι το ζητούμενο.

Κεφάλαιο 3
Βασικές τεχνικές ολοκλήρωσης

- Να δω την παρουσίαση στα ολοκληρώματα στο helios.

Τεχνικές ολοκλήρωσης ρητών συναρτήσεων

Υπενθυμίζουμε ότι ρητή είναι κάθε συνάρτηση της μορφής $\frac{p}{q}$

όπου τα p, q είναι πολυώνυμα.

Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε αόριστα ολοκληρώματα της μορφής

$$I(p,q) = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$

για μια μεγάλη κατηγορία πολυωνύμων p και q.

Θα επικεντρωθούμε στις περιπτώσεις όπου

$$\underbrace{\deg p}_{\text{βαθμός } p} < \deg q$$

Όταν $\deg p \geq \deg q$

εκτελούμε διαίρεση πολυωνύμων:

$$\frac{p}{q} = \pi + \frac{r}{q}$$

όπου τα π, r είναι πολυώνυμα και $\deg r < \deg q$.

Τότε το $I(p,q)$ στην ουσία ανάγεται στο $I(r,q)$:

$$\underbrace{\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx}_{I(p,q)} = \int \pi(x)\,dx + \underbrace{\int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx}_{\substack{I(r,q)\\ \deg r < \deg q}}$$

Σημείωση: όταν $\deg p = \deg q$ η διαίρεση είναι απλή.

Π.χ. $$\frac{x^2+5}{x^2+3x+2} = \frac{x^2+3x+2-3x-2+5}{x^2+3x+2}$$

$$= \overset{\pi(x)}{1} + \overset{r(x)}{\frac{-3x+3}{x^2+3x+2}}$$

Θεμελιώδη Ολοκληρώματα:

i) $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$

γενικότερα:

$$\int \frac{1}{x+a} \, dx = \ln|x+a| + c , \quad c \in \mathbb{R}$$

όπου $a \in \mathbb{R}$.

ii) $\int \frac{1}{x^2+1} \, dx = \underbrace{\arctan}_{\text{τόξο εφαπτομένης}} x + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$

γενικότερα:

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c , \quad c \in \mathbb{R}$$

όπου $a \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$.

Θα καθορίσουμε το $I(p,q)$ στις εξής περιπτώσεις:

	$\deg p$	$\deg q$ / $q(x)$
1)	0	$q(x) = (ax+b)^n$, $n \geq 1$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$
2)	0	2
3)	1	2

Θα εξετάσουμε επίσης τις εξής περιπτώσεις:

4) $\deg p \leq 2$ και

$$q(x) = (dx+e)(ax^2+bx+c)$$

όπου $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, $a, d \neq 0$

5) $\deg p \leq 3$ και

$$q(x) = (dx+e)^2(ax^2+bx+c)$$

όπου $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, $a, d \neq 0$

Περίπτωση 1)

$\deg p = 0$ και $q(x) = (ax+b)^n$
$n \geq 1 \quad a \neq 0$

Εκτελούμε την αντικατάσταση

$$\boxed{u = ax + b}$$

Παραδείγματα:

i) $$I = \int \frac{3}{2x-5}\,dx$$

$u = 2x - 5, \quad du = 2\,dx$

$$I = \int \frac{3}{u} \cdot \frac{1}{2}\,du$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{3}{2}\ln|u| + c$$

$$= \frac{3}{2}\ln|2x-5| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

ii) $$I = \int \frac{1}{(3x+7)^{10}}\,dx$$

$u = 3x + 7, \quad du = 3\,dx$

$$I = \int \frac{1}{u^{10}} \cdot \frac{1}{3}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^{10}}\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{-9}}{-9} + c$$

$$= -\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{(3x+7)^9} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Περίπτωση 2)

$\deg p = 0$ και $\deg q = 2$

$q(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$
$a \neq 0$

Θεωρούμε τη διακρίνουσα Δ του q:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Υποπερίπτωση 2a) $\Delta < 0$

Τότε το $q(x)$ έρχεται στη μορφή

$$\pm q(x) = (Ax + B)^2 + \Gamma^2$$

όπου $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$, $A, \Gamma \neq 0$.

Εκτελούμε την αντικατάσταση

$$\boxed{u = Ax + B}$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με τη βοήθεια της arctan.

Παραδείγματα:

i) $I = \int \frac{2}{x^2+3x+4} dx$

$q(x) = x^2+3x+4$

$\Delta = 9-16 = -7<0$

Χρήση ταυτότητας

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$$q(x) = x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+4$$

\+ −

$$= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+4-\frac{9}{4}$$

$$= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$$

$$= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$$

$u = x+\frac{3}{2} \qquad du = dx$

$$I = \int \frac{2}{u^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} du$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)} \arctan\left(\frac{u}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right) + c$$

$$= \frac{4}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{7}}\right) + c$$

$$= 4 \cdot \frac{\sqrt{7}}{7} \arctan\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\left(x + \frac{3}{2}\right)\right) + c$$

$$= 4 \cdot \frac{\sqrt{7}}{7} \arctan\left(\frac{\sqrt{7}}{7}(2x+3)\right) + c$$

όπου $c \in \mathbb{R}$.

ii) $I = \int \frac{1}{3x^2 - x + 2} dx$

$q(x) = 3x^2 - x + 2 \qquad \Delta = 1 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -23 < 0$

$$= (\sqrt{3}x)^2 - 2 \cdot (\sqrt{3}x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{(2\sqrt{3})^2}$$

$$- \frac{1}{(2\sqrt{3})^2} + 2$$

$$= \left(\sqrt{3}x - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + 2 - \frac{1}{4 \cdot 3}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}x \cdot 2\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{23}{12}$$

$$= \left(\frac{6x-1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{23}{12}}\right)^2$$

$$u = \frac{6x-1}{2\sqrt{3}} \qquad du = \frac{6}{2\sqrt{3}}\,dx$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3}}\,dx = \sqrt{3}\,dx$$

$$I = \int \frac{1}{u^2 + \left(\sqrt{\frac{23}{12}}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\,du$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{u^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{3}}\right)^2}\,du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{3}}} \cdot \arctan\left(\frac{u}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{3}}}\right) + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{23}} \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}\,u}{\sqrt{23}}\right) + c$$

Έχουμε: $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{23}} \cdot u = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{23}} \cdot \frac{6x-1}{2\sqrt{3}}$

$$= \frac{6x-1}{\sqrt{23}}$$

Άρα

$$I = \frac{2}{\sqrt{23}} \arctan\left(\frac{6x-1}{\sqrt{23}}\right) + c$$

$$= \frac{\sqrt{23}}{23} \cdot 2 \arctan\left(\frac{\sqrt{23}}{23}(6x-1)\right) + c$$

όπου $c \in \mathbb{R}$.

β΄ τρόπος:

$$q(x) = 3x^2 - x + 2 = 3\left(x^2 - \frac{x}{3} + \frac{2}{3}\right)$$

Δουλεύουμε με το $x^2 - \frac{x}{3} + \frac{2}{3} = r(x)$.

Τότε $r(x) = x^2 - 2x \cdot \frac{1}{3.2} + \frac{1}{6^2}$

$$- \frac{1}{6^2} + \frac{2}{3}$$

$$= \left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{23}{36} = \left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{23}}{6}\right)^2$$

(Συνεχίζουμε ομοίως)

Προσοχή: Αν ο συντελεστής του x^2 στο q είναι <0, τότε βγάζουμε το -1 κοινό παράγοντα και ασχολούμαστε με το $-q$.

π.χ. $q(x) = -x^2+x-1$ $\quad \Delta = 1^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-1) = 1-4 = -3<0$

$$q(x) = -\underbrace{(x^2 - x + 1)}_{-q}$$

$$= -\left(x^2 - 2x\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1\right)$$

$$= -\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)$$

(Συνεχίζουμε ομοίως)

Υποπερίπτωση 2β) $\Delta = 0$

Τότε $q(x) = a\cdot(x-B)^2$

B = ρίζα του q

a = συντελεστής του x^2 στο q

Εκτελούμε την αντικατάσταση

$$\boxed{u = x - B}$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με βάση το $\int \frac{1}{u^2}\,du$.

Παράδειγμα:

$$I = \int \frac{5}{4x^2+4x+1}\,dx$$

$$q(x) = 4x^2+4x+1$$

$$\Delta = 16-16=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$$

Τότε $\quad q(x) = 4 \cdot \left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

$$u = x+\frac{1}{2} \qquad du = dx$$

$$I = \int \frac{5}{4u^2}\,du = \frac{5}{4}\int \frac{1}{u^2}\,du$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{u^{-1}}{-1} + c = -\frac{5}{4u} + c$$

$$= -\frac{5}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)} + c = -\frac{5}{4x+2} + c$$

$$c \in \mathbb{R}.$$

Σχόλιο: Μπορούμε επίσης να πούμε:

$$g(x) = 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2$$

$$= (2x+1)^2$$

Εκτελούμε την αντικατάσταση

$$u = 2x+1 \,. \quad du = 2\,dx$$

(Συνεχίζουμε ομοίως)

Υποπερίπτωση 2γ) $\Delta > 0$

Τότε $q(x) = a(x - B_1)(x - B_2)$

$B_1 \neq B_2$ ρίζες του q

a = συντελεστής του x^2 στο q

Διαχωρίζουμε το κλάσμα:

$$\frac{1}{(x - B_1)(x - B_2)} = \frac{d_1}{x - B_1} + \frac{d_2}{x - B_2}$$

όπου $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. (Καμμιά φορά είναι πιο εύκολο να το διαχωρίσουμε μαζί με το a)

Τότε το I υπολογίζεται με τη βοήθεια των

$$\int \frac{1}{x - B_1} dx = \ln|x - B_1|$$

$$\int \frac{1}{x - B_2} dx = \ln|x - B_2|.$$

Παράδειγμα:

$$I = \int \frac{1}{2x^2 + x - 3} dx$$

$q(x) = 2x^2 + x - 3$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)$$

$$= 1 + 24 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 5}{4}$$

$$= \begin{cases} \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \\ \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

Άρα

$$q(x) = 2 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 1)$$

$$= (2x + 3)(x - 1)$$

Διαχωρίζουμε: (Για ευκολία τοποθετούμε το $a = 2$ μέσα στην 1η παρένθεση)

$$\frac{1}{(2x+3)(x-1)} = \frac{d_1}{2x+3} + \frac{d_2}{x-1}$$

$$d_1(x-1) + d_2(2x+3) = 1$$

$$(d_1 + 2d_2)x + 3d_2 - d_1 = 1$$

$$d_1 + 2d_2 = 0 \qquad 3d_2 - d_1 = 1$$

Άρα $d_1 = -2d_2$

$$3d_2 - (-2d_2) = 1$$

$$5d_2 = 1$$

$$d_2 = \frac{1}{5} \qquad d_1 = -\frac{2}{5}$$

Άρα

$$\frac{1}{q(x)} = -\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{(2x+3)} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x-1}$$

και

$$I = -\frac{2}{5} \int \frac{1}{2x+3}\,dx + \frac{1}{5} \int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= -\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+\frac{3}{2}}\,dx + \frac{1}{5} \int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{5} \ln\left|x+\frac{3}{2}\right| + \frac{1}{5} \ln|x-1| + c$$

όπου $c \in \mathbb{R}$.

(*) Επίσης σωστό:

$$-\frac{2}{5} \cdot \int \frac{1}{2x+3}\,dx = -\frac{2}{5} \cdot \int \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{2}\,du$$

$(u = 2x+3)$

$$= -\frac{1}{5} \ln|u| = -\frac{1}{5} \ln|2x+3|$$