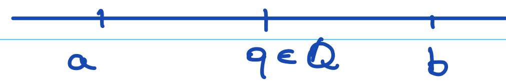
Θεώρημα: (Πυκνότητα ρητών αριθμών)

Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $a < q < b$.



Π.χ. $\sqrt{2} \simeq 1,41$ $\quad q = 1,5$

$\sqrt{3} \simeq 1,73$

Πόρισμα: Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a<b$ υπάρχει $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ με $a < x < b$.

(Πυκνότητα άρρητων)

Απόδειξη:

Θεωρούμε $a < b$. Τότε $\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{b}{\sqrt{2}}$.

Από την πυκνότητα των ρητών υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $\frac{a}{\sqrt{2}} < q < \frac{b}{\sqrt{2}}$.

Επίσης μπορούμε να υποθέσουμε ότι $q \neq 0$.

Άρα $a < \underbrace{\sqrt{2} \cdot q}_{x} < b$. $\quad x = \sqrt{2} q$.

Ο $x \in (a,b)$ είναι άρρητος, γιατί αλλιώς θα είχαμε $x \in \mathbb{Q}$, άρα $\frac{1}{q} \cdot x \in \mathbb{Q}$

άρα $\frac{1}{\cancel{q}} \cdot \sqrt{2} \cdot \cancel{q} = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ άτοπο.

Ο συμβολισμός Σ:

Δίνονται $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ όπου $n \geq 1$.

Το άθροισμα $a_0 + \dots + a_n$ συμβολίζεται με

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{ή} \quad \sum_{j=0}^{n} a_j \quad \text{κ.τ.λ.}$$

Δηλαδή
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \dots + a_n}$$

Μπορεί επίσης να έχουμε $\sum_{k=1}^{n} a_k$.

Αυτό σημαίνει το άθροισμα $a_1 + \dots + a_n$.

Άλλο παράδειγμα: $\sum_{k=2}^{n-1} a_k = a_2 + \dots + a_{n-1}$
$(n \geq 3)$

Προσοχή: $\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0$

ή $\sum_{k=17}^{17} a_k = a_{17}$

Άλλο παράδειγμα:

$$\sum_{k=0}^{5} (1+x)^k = (1+x)^0 + (1+x)^1 + \dots + (1+x)^5$$
$$= 1 + (1+x) + (1+x)^2 + \dots + (1+x)^5$$

Προσοχή: Το $\sum_{k=0}^{n} a_k$ γράφεται

επίσης $\sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1}$ γιατί:

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} = a_{1-1} + a_{2-1} + \dots + a_{n+1-1}$$
$$= a_0 + a_1 + \dots + a_n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k .$$

Ιδιότητες:

1) $\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)$

γιατί

$$a_0 + \dots + a_n + b_0 + \dots + b_n = (a_0+b_0) + \dots + (a_n+b_n)$$

2) $\lambda \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \lambda \cdot a_k$

γιατί

$$\lambda \cdot (a_0 + \dots + a_n) = \lambda a_0 + \dots + \lambda a_n$$

όπου $\lambda, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Ο τύπος στο Διώνυμο του Νεύτωνα γράφεται και ως εξής:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k}$$

2^{o} Κεφάλαιο
Συναρτήσεις — Πολυώνυμα Taylor

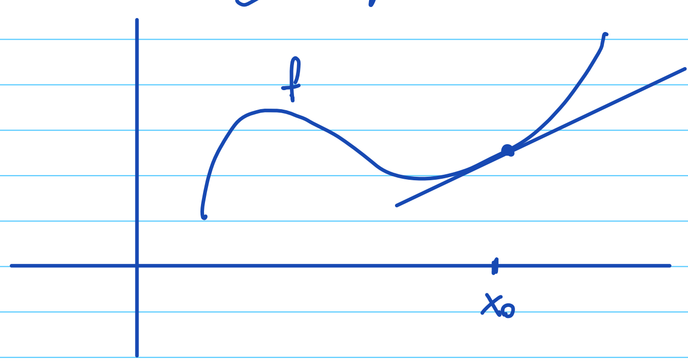
— Να δω την παρουσίαση πάνω στις συναρτήσεις.

Πολυώνυμα Taylor

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια συνάρτηση $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και παίρνουμε $x_0 \in (a,b)$.

Στόχος: να προσεγγίσουμε τις τιμές $f(x)$ για τα x "κοντά" στο x_0.

Αυτή η προσέγγιση θα γίνει με τη βοήθεια πολυωνύμων.



1) Προσέγγιση με πολυώνυμο βαθμού ≤ 1.
Μια καλή προσέγγιση είναι να πάρουμε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

Παίρνουμε $p(x) = \underbrace{a + b \cdot (x - x_0)}_{\text{εξίσωση ευθείας}}$

$a, b = ;;$

κλίση = b

Θέλουμε :

(1.1) $p(x_0) = f(x_0)$

(1.2) $p'(x_0) = f'(x_0)$ (δηλαδή η κλίση της ευθείας, που είναι το $b = p'(x_0)$ να είναι ίση με $f'(x_0)$)

$$p(x_0) = a + b \cdot \cancel{(x_0 - x_0)}$$
$$= a$$

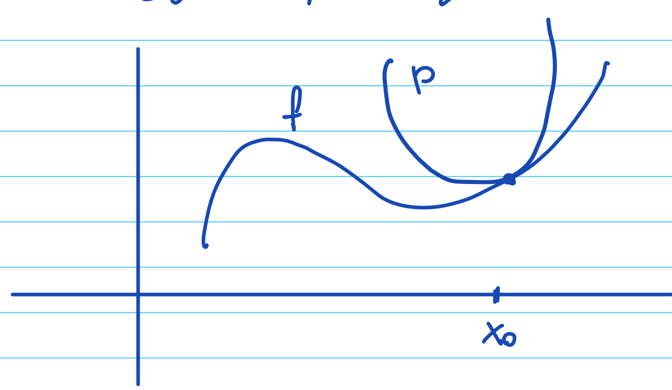
Από (1.1) έχουμε $a = f(x_0)$.

Επιπλέον $p'(x) = 0 + b \cdot 1 = b$
άρα $p'(x_0) = b$

Από (1.2) έχουμε $b = f'(x_0)$

Καταλήγουμε ότι $p(x) = f(x_0) + \underbrace{\cancel{f'(x_0)}(x - x_0)}_{\to 0}$.

2) Προσέγγιση με πολυώνυμο βαθμού ≤ 2.



Παίρνουμε

$$p(x) = a + b(x-x_0) + c(x-x_0)^2$$

Θέλουμε:

$$p(x_0) = f(x_0) \quad (2.1)$$

$$p'(x_0) = f'(x_0) \quad (2.2)$$

$$p''(x_0) = f''(x_0) \quad (2.3)$$

$$p'(x) = b + 2c(x-x_0)$$

$$p''(x) = 2c$$

$(2.1) \Rightarrow f(x_0) = p(x_0) = a$

$(2.2) \Rightarrow f'(x_0) = p'(x_0) = b + 2c \cdot 0 = b$

$(2.3) \Rightarrow f''(x_0) = p''(x_0) = 2c$

Άρα $a = f(x_0)$, $b = f'(x_0)$, $c = \dfrac{f''(x_0)}{2}$

και $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$.

3) Προσέγγιση με πολυώνυμο βαθμού ≤ 3

Παίρνουμε

$$p(x) = a + b(x-x_0) + c(x-x_0)^2 + d(x-x_0)^3$$

Θέλουμε: $p(x_0) = f(x_0)$

$$p'(x_0) = f'(x_0)$$

$$p''(x_0) = f''(x_0)$$

$$p^{(3)}(x_0) = f^{(3)}(x_0)$$

$$p'(x) = b + 2c(x-x_0) + 3d(x-x_0)^2$$

$$p''(x) = 2c + 3\cdot 2\cdot d(x-x_0)$$

$$p^{(3)}(x) = 3\cdot 2\cdot d$$

Τελικά βρίσκουμε

$$a = f(x_0) \qquad b = f'(x_0) \qquad c = \frac{f''(x_0)}{2!}$$

$$d = \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}$$

Άρα

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3$$