Συναρτήσεις - Σύντομη Εισαγωγή

Βασίλειος Γρηγοριάδης

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Συναρτήσεις

Ορισμός:

Συνάρτηση από ένα μη-κενό σύνολο A σε ένα μη-κενό σύνολο B είναι μια αντιστοίχιση f μεταξύ των στοιχείων του A και κάποιων στοιχείων του B.

Το A καλείται πεδίο ορισμού της f και το B πεδίο τιμών ή σύνολο τιμών.

Βασικός κανόνας: Σε κάθε $x \in A$ αντιστοιχεί ακριβώς ένα $y \in B$ μέσω της f.

Συμβολισμοί: Με $f : A \to B$ εννοούμε ότι η f είναι συνάρτηση από το A στο B. Αν $x \in A$ συμβολίζουμε με $f(x)$ το μοναδικό y που αντιστοιχεί στο x μέσω της f.

Παραδείγματα:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^4 - x + 5$
2. $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : f(x) = x^4 - x + 5$
3. $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : f(x) = x^{-1}$

Ακόμα ένας συμβολισμός: Κάποιες φορές χρησιμοποιούμε και το σύμβολο $\mapsto$ για να ορίσουμε την τιμή $f(x)$:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2-1}{(x-4)(x+3)}.$$

Αυτό σημαίνει ότι $f(x) = \dfrac{x^2-1}{(x-4)(x+3)}$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Παρατηρήσεις:

1. Οι συναρτήσεις που μελετάμε συνήθως ορίζονται σε υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και παίρνουν πραγματικές τιμές. Τίποτα δεν εμποδίζει όμως τα πεδία ορισμού και τιμών να είναι τυχαία σύνολα, π.χ. σύνολα από πίνακες.
2. Οι συναρτήσεις που μελετάμε συνήθως ορίζονται μέσα από κάποιο τύπο, π.χ. $f(x) = x^2$. Ούτε αυτό όμως είναι υποχρεωτικό. Μια συνάρτηση δεν είναι απαραίτητο να ορίζεται μέσω κάποιου τύπου.

Αν έχουμε μια συνάρτηση $f\colon A \to B$ η *εικόνα* της f είναι το σύνολο

$$f(A) = \{\ y \in B \mid y = f(x) \quad \text{για κάποιο } x \in A\ \}.$$

Πιο γενικά αν $I \subseteq A$ τότε η *εικόνα του συνόλου I* μέσω της f είναι το σύνολο

$$f(I) = \{\ y \in B \mid y = f(x) \quad \text{για κάποιο } x \in I\ \}.$$

Η $f\colon A \to B$ είναι *επί* συνάρτηση αν $f(A) = B$ και *1-1* συνάρτηση αν:

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in A \text{ με } x_1 \neq x_2 \text{ ισχύει } f(x_1) \neq f(x_2),$$

ισοδύναμα

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in A \text{ με } f(x_1) = f(x_2) \text{ ισχύει } x_1 = x_2.$$

Αν έχουμε μια συνάρτηση $f\colon A \to B$ 1-1 και επί τότε ορίζεται η *αντίστροφη συνάρτηση* $f^{-1} : B \to A$ ως εξής:

$$f^{-1}(y) = \text{το μοναδικό } x \in A \text{ με } f(x) = y.$$

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty) : x \mapsto x^2$ είναι 1-1 και επί με αντίστροφη την $f^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty) : f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Περιορισμός συνάρτησης: Δίνεται μια συνάρτηση $f\colon A \to B$ και X ένα μη-κενό υποσύνολο του A. Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $h : X \to B : h(x) = f(x)$. Η h ονομάζεται *περιορισμός της f* στο σύνολο X και συνήθως συμβολίζεται με $f_{|X}$ ή $f\,|X$. Η f ονομάζεται *επέκταση της h*.

Σύνθεση συναρτήσεων: Δίνονται δύο συναρτήσεις $f\colon X \to Y$ και $g : Y \to Z$. Τότε ορίζεται η σύνθετη συνάρτηση $h : X \to Z : x \mapsto g(f(x))$. Η h συμβολίζεται ως $g \circ f$ και διαβάζεται με διαφορετικούς τρόπους:
"g συντεθειμένη με την f", "g της f", "g κύκλος f" κ.λ.π.

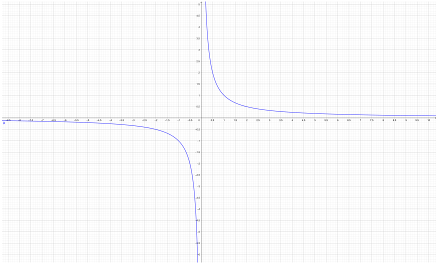
Κάποιοι συγγραφείς ορίζουν τη σύνθεση περιορίζοντας κατάλληλα τα πεδία ορισμού: αν $f\colon A \to B$ και $g : C \to Z$ και το σύνολο $X = \{\, x \in A \mid f(x) \in C \,\}$ είναι μη-κενό, τότε ορίζεται η $g \circ f\colon X \to Z : x \mapsto g(f(x))$.

Στην ουσία όμως είναι *σύνθεση των περιορισμών* $g|f(X)$ και $f\,|X$.

Η *γραφική παράσταση* μιας συνάρτησης $f: A \to B$ είναι το εξής υποσύνολο του $A \times B$,

$$C_f = \{\ (x, y) \in A \times B \ \mid \ y = f(x)\ \}.$$

Στην περίπτωση όπου τα A, B είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$ έχουμε $C_f \subseteq \mathbb{R}^2$ και μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση με βάση ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων:
Π.χ. $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : f(x) = 1/x$.



Μερικές Θεμελιώδεις Συναρτήσεις

1. Όλα τα πολυώνυμα $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ με πραγματικούς συντελεστές.
2. Όλες οι συναρτήσεις r της μορφής $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, όπου τα p, q είναι πολυώνυμα. Αυτές οι συναρτήσεις ονομάζονται ρητές.
3. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

   cos = συνημίτονο (cosine) sin = ημίτονο (sine)

   tan = εφαπτομένη (tangent).
4. Η εκθετική συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to (0, \infty) \to \mathbb{R} : f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
5. Ο φυσικός (ή αλλιώς νεπέριος) λογάριθμος $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Αυτή είναι η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης.
6. Για κάθε $a > 0$ έχουμε τη συνάρτηση $f_a : \mathbb{R} \to (0, \infty) \to \mathbb{R} : f_a(x) = e^{x \cdot \ln a}$. Η τιμή $f_a(x)$ συμβολίζεται και με a^x.

Συνέχεια συνάρτησης - Διαισθητική Προσέγγιση

1. Η έννοια της συνέχειας ορίζεται (μεταξύ άλλων) για συναρτήσεις $f\colon A \to \mathbb{R}$ όπου το A είναι *τυχαίο* υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
2. Διαισθητικά μια συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in A$ αν για κάθε $x \in A$ που είναι "κοντά" στο x_0 η τιμή $f(x)$ είναι "κοντά" στο $f(x_0)$.
3. Μελετάμε συνήθως τη συνέχεια όταν το *πεδίο ορισμού* είναι:
   α) ένα *διάστημα*, π.χ. $A = [0, 1)$, $A = (-\infty, 8]$, $A = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$,
   β) *ένωση διαστημάτων* π.χ. $A = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
4. Για τις συναρτήσεις που ορίζονται σε διάστημα ή σε ένωση (μη-τετριμμένων) διαστημάτων, συνέχεια σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f δεν "διακόπτεται" γύρω από το x_0.
5. Μια συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$ είναι *συνεχής* αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in A$.

Βασικές Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

A) *Άλγεβρα συνεχών συναρτήσεων.*

Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A' \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A \cap A'$. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο x_0 τότε:

1. οι συναρτήσεις $f \pm g : A \cap A' \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \pm g(x)$ είναι συνεχείς στο x_0,
2. οι $f \cdot g, f/g : A \cap A' \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \cdot g(x), f(x)/g(x)$ είναι συνεχείς στο x_0,
   (στο πηλίκο θεωρούμε ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A \cap A'$),
3. για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $\lambda f : A \to \mathbb{R} : x \mapsto \lambda \cdot f(x)$ είναι συνεχής στο x_0.

B) *Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.*

Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο συναρτήσεις $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και αν η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η σύνθεση $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0.

Γ) *Θεμελιώδεις συνεχείς συναρτήσεις.*

1. οι σταθερές συναρτήσεις, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = c$, όπου $c \in \mathbb{R}$,
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^n$, όπου $n \geq 1$,
3. όλα τα πολυώνυμα,
4. όλες οι ρητές συναρτήσεις στα σημεία που ορίζονται
5. η συνάρτηση της n-οστης ρίζας, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$, όπου $n \geq 1$,
6. η συνάρτηση της απολύτου τιμής, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$,
7. όλες οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις sin (ημίτονο), cos (συνημίτονο) και tan (εφαπτομένη) στα σημεία που ορίζονται.

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιες συνεχείς συναρτήσεις από παλιές,π.χ. αν η f είναι συνεχής τότε και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς,

$$g_1(x) = f(x)^2 + (f(x) - 1) \cdot x^2, \quad g_2(x) = \cos(f(x) + 8),$$
$$g_3(x) = \sqrt{f(x)}, \text{ όπου } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x$$

Άλλα παραδείγματα:

$$x^2$$

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιες συνεχείς συναρτήσεις από παλιές,π.χ. αν η f είναι συνεχής τότε και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς,

$$g_1(x) = f(x)^2 + (f(x) - 1) \cdot x^2, \quad g_2(x) = \cos(f(x) + 8),$$
$$g_3(x) = \sqrt{f(x)}, \text{ όπου } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x$$

Άλλα παραδείγματα:

$$3x^2$$

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιες συνεχείς συναρτήσεις από παλιές,π.χ. αν η f είναι συνεχής τότε και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς,

$$g_1(x) = f(x)^2 + (f(x) - 1) \cdot x^2, \quad g_2(x) = \cos(f(x) + 8),$$
$$g_3(x) = \sqrt{f(x)}, \text{ όπου } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x$$

Άλλα παραδείγματα:

$$3x^2 + 1$$

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιες συνεχείς συναρτήσεις από παλιές,π.χ. αν η f είναι συνεχής τότε και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς,

$$g_1(x) = f(x)^2 + (f(x) - 1) \cdot x^2, \quad g_2(x) = \cos(f(x) + 8),$$
$$g_3(x) = \sqrt{f(x)}, \text{ όπου } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x$$

Άλλα παραδείγματα:

$$\sqrt{3x^2 + 1}$$

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιες συνεχείς συναρτήσεις από παλιές,π.χ. αν η f είναι συνεχής τότε και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς,

$$g_1(x) = f(x)^2 + (f(x) - 1) \cdot x^2, \quad g_2(x) = \cos(f(x) + 8),$$
$$g_3(x) = \sqrt{f(x)}, \text{ όπου } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x$$

Άλλα παραδείγματα:

$$\cos\left(\sqrt{3x^2 + 1}\right)$$

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιες συνεχείς συναρτήσεις από παλιές,π.χ. αν η f είναι συνεχής τότε και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς,

$$g_1(x) = f(x)^2 + (f(x) - 1) \cdot x^2, \quad g_2(x) = \cos(f(x) + 8),$$
$$g_3(x) = \sqrt{f(x)}, \text{ όπου } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x$$

Άλλα παραδείγματα:

$$\cos\left(\sqrt{3x^2 + 1}\right) /(\sqrt{(x-2)(x+3)}, \text{ για } x \neq -3, 2.$$

Παραγώγιση

Παίρνουμε δεδομένη την έννοια της παραγώγου - θα αναφερθούμε σε αυτήν την έννοια εκτενέστερα σε επόμενες διαλέξεις.

Οι παράγωγοι μερικών γνωστών συναρτήσεων

	Συνάρτηση f	Παράγωγος f'
1	Σταθερή	0
2	x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}
3	x^q $(q \in \mathbb{Q},\ x > 0)$	qx^{q-1} $(q \in \mathbb{Q},\ x > 0)$
4	$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$	$n a_n x^{n-1} + \cdots + a_1$
5	$\sin x$	$\cos x$
6	$\cos x$	$-\sin x$
7	$\tan x$	$1/\cos^2(x)$
8	e^x	e^x
9	a^x $(a > 0)$	$a^x \cdot \ln(a)$ $(a > 0)$
10	$\ln x$ $(x > 0)$	$1/x$ $(x > 0)$