Τριγωνομετρικά Ολοκληρώματα

Πολυώνυμο δύο μεταβλητών είναι μια συνάρτηση $p(x,y)$ όπου τα x, y εμφανίζονται στη μορφή $x^n \cdot y^m$ $n = 0, 1, \ldots$, $m = 0, 1, \ldots$ και μάλιστα το $p(x,y)$ είναι πεπερασμένο άθροισμα πολλαπλασίων των $x^n \cdot y^m$.

Π.χ. 1) $p(x,y) = x^2 y + 2xy^3 + 1$

2) $p(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 8$

3) $p(x,y) = 1$

4) $p(x,y) = x^3 + y^3 + 5x^4y^5 - y^8 - 1$

Ρητή συνάρτηση δύο μεταβλητών είναι ο λόγος δύο πολυωνύμων δύο μεταβλητών.

Π.χ. 1) $R(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1}$ $x, y \in \mathbb{R}$

2) $R(x,y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$, $x, y \neq 0$

Η ρητή συνάρτηση ορίζεται ακριβώς εκεί που δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής.

Ασχολούμαστε με ολοκληρώματα της μορφής

$$I_R = \int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

όπου $R(u, v)$ είναι ρητή συνάρτηση δύο μεταβλητών u, v.

π.χ. 1) $R(u,v) = \dfrac{u^2}{u+v}$

τότε

$$R(\sin x, \cos x) = \underbrace{\frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}}_{\text{η προς ολοκλήρωση συνάρτηση}}$$

2) Δίνεται η προς ολοκλήρωση συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\cos x + \sin^3 x}{2 \cos x \sin x}.$$

Τότε παίρνουμε $R(u, v) = \dfrac{v + u^3}{2uv}$

και έχουμε $f(x) = R(\sin x, \cos x)$

Θα μελετήσουμε το I_R στις εξής περιπτώσεις:

(A) Η $R(u,v)$ είναι περιττή ως προς u, δηλαδή

$$R(-u, v) = -R(u, v).$$

(B) Η $R(u,v)$ είναι περιττή ως προς v, δηλαδή

$$R(u,-v) = -R(u,v).$$

(C) Η $R(u,v)$ είναι άρτια ως προς το ζεύγος (u,v), δηλαδή

$$R(-u,-v) = R(u,v).$$

Θα δούμε ότι με κατάλληλη αντικατάσταση το I_R σε αυτές τις περιπτώσεις ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης μίας μεταβλητής.

Περίπτωση (A):

$R(u,v)$ = περιττή ως προς u.
Αντικατάσταση $t = \cos x$

Παράδειγμα:

$$I = \int \frac{\sin x}{3+\cos x}\, dx$$

$$R(u,v) = \frac{u}{3+v}, \quad \text{ισχύει:}$$

$$R(-u,v) = \frac{-u}{3+v} = -\frac{u}{3+v} = -R(u,v)$$

Άρα η R είναι περιττή ως προς u.

Αντικατάσταση $t = \cos x$.

$$dt = -\sin x \, dx$$

$$I = \int \frac{\sin x}{3+\cos x} dx = \int \frac{1}{3+t} \cdot (-1) \, dt$$

$$= -\int \frac{1}{3+t} dt = -\ln|3+t| + c$$

$$= -\ln|3+\cos x| + c$$

$c \in \mathbb{R}$.

$$= -\ln(3+\cos x) + c$$

(γιατί $\cos x \geq -1$)

Σχόλιο: Στο συγκεκριμένο παράδειγμα μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι ο αριθμητής είναι η παράγωγος του παρονομαστή.

Περίπτωση (Β):

$$\boxed{\begin{array}{l} R(u,v) : \text{περιττή ως προς } v. \\ \text{Αντικατάσταση } t = \sin x \end{array}}$$

Παράδειγμα:

$$I = \int \frac{1}{\sin^2 x \cos x} dx$$

$$R(u,v) = \frac{1}{u^2 v},$$

$$R(u,-v) = \frac{1}{u^2 \cdot (-v)} = -\frac{1}{u^2 v} = -R(u,v)$$

Αντικατάσταση $t = \sin x$.

$dt = \cos x \, dx$

$$I = \int \frac{1}{\sin^2 x \cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1}{t^2(1-t^2)} dt \qquad \left(\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2 \right)$$

Αναλύουμε : $\dfrac{1}{t^2(1-t^2)} = \dfrac{A}{t^2} + \dfrac{B}{1-t^2}$

$\left(w = t^2, \quad \dfrac{1}{w(1-w)} = \dfrac{A}{w} + \dfrac{B}{1-w} \right)$

$$\frac{A}{t^2} + \frac{B}{1-t^2} = \frac{A(1-t^2) + Bt^2}{t^2(1-t^2)}$$

Αριθμητής $= A - At^2 + Bt^2$
$= (-A+B)t^2 + A$

Αριθμητής $= 1$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} -A+B = 0 \\ A = 1 \end{array} \Bigg| \quad A = B = 1$$

Άρα $\dfrac{1}{t^2(1-t^2)} = \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{1-t^2}$

Αναλύουμε το $\dfrac{1}{1-t^2}$: $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{1}{(1-t)(1+t)}$

Μετά από πράξεις βρίσκουμε :

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t}$$

Καταλήγουμε ότι:

$$I = \int \frac{1}{t^2(1-t^2)}\,dt = \int \frac{1}{t^2}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}\,dt$$

$$= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\int \frac{-1}{1+s}\,ds + \frac{1}{2}\ln|1+t| + c$$

$$s=-t$$

$$= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\cdot(-1)\ln|1+s| + \frac{1}{2}\ln|1+t| + c$$

$$= -\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{2}\ln|1-\sin x| + \frac{1}{2}\ln|1+\sin x| + c$$

$$= -\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{2}\ln(1-\sin x) + \frac{1}{2}\ln(1+\sin x) + c$$

$$(\sin x \le 1 \Rightarrow 1-\sin x \ge 0)$$

Περίπτωση Γ:

$$\boxed{\begin{array}{l} R(u,v):\ \text{άρτια ως προς } (u,v) \\ \text{Αντικατάσταση}:\ t=\tan x \end{array}}$$

Παράδειγμα:

$$I = \int \frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x}\,dx$$

$$R(u,v) = \frac{1}{u^4 v^2}$$

$$R(-u,-v) = \frac{1}{(-u)^4 (-v)^2} = \frac{1}{u^4 v^2} = R(u,v)$$

Αντικατάσταση $t = \tan x$

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$$

Πρέπει να αντικαταστήσουμε το $\frac{1}{\sin^4 x}$ με μια συνάρτηση του t.

$$t = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow t \cdot \cos x = \sin x$$

$$\Rightarrow t^2 \cos^2 x = \sin^2 x \Rightarrow t^2 (1 - \sin^2 x) = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow t^2 - t^2 \sin^2 x = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow t^2 = \sin^2 x (1 + t^2)$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \Rightarrow \sin^4 x = \frac{t^4}{(1+t^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^4 x} = \frac{(1+t^2)^2}{t^4} = \left(\frac{1+t^2}{t^2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{t^2} + 1\right)^2 = \frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^2} + 1$$

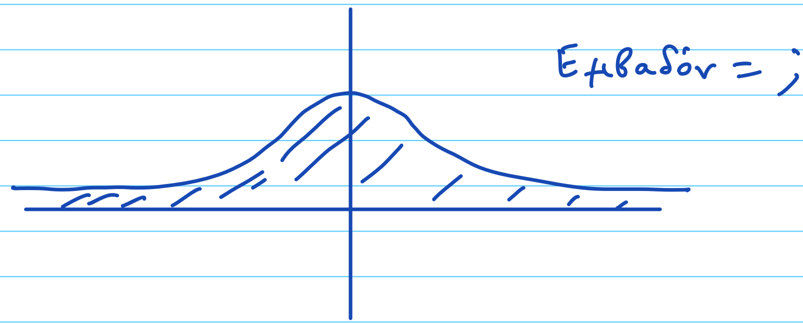
$$I = \int \frac{1}{t^4}\, dt + \int \frac{2}{t^2}\, dt + \int 1\, dt$$

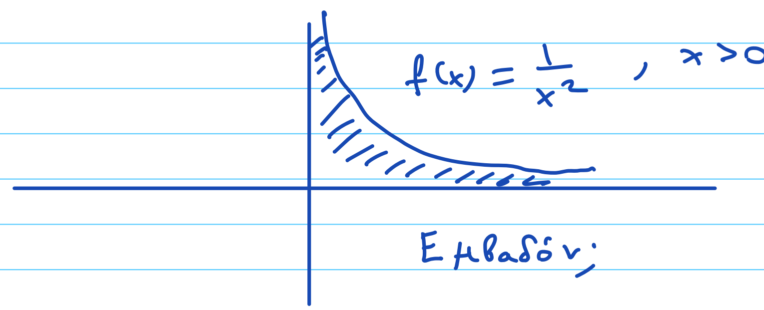
$$= \frac{t^{-3}}{-3} + 2 \cdot \frac{t^{-1}}{-1} + t + c$$

$$= -\frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + c$$

$$= -\frac{1}{3\tan^3 x} - \frac{2}{\tan x} + \tan x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Γενικευμένα ολοκληρώματα



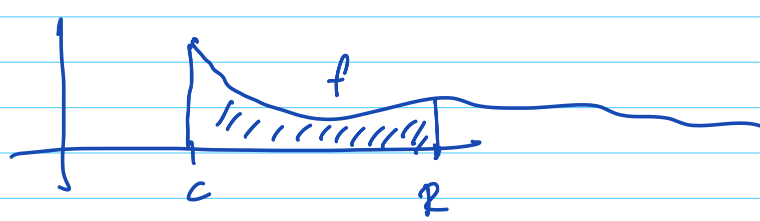


Θέλουμε να επεκτείνουμε την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος σε συναρτήσεις που δεν ορίζονται σε κλειστό διάστημα $[a,b]$.

Γενικευμένα ολοκληρώματα α' είδους:

Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση

$f: [c, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.



Τότε για κάθε $R > c$ ορίζεται το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_c^R f(x)\,dx$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{R \to +\infty} \int_c^R f(x)\,dx.$$

σημαίνει ότι είναι πραγματικός αριθμός

Τότε ορίζουμε

$$\boxed{\int_c^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R \to +\infty} \int_c^R f(x)\,dx}$$

Όμοια αν έχουμε μια συνεχή συνάρτηση $f: (-\infty, c] \to \mathbb{R}$ και αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{R \to -\infty} \int_R^c f(x)\,dx$$

σημαίνει ότι είναι πραγματικός αριθμός

τότε ορίζουμε:

$$\boxed{\int_{-\infty}^c f(x)\,dx = \lim_{R \to -\infty} \int_R^c f(x)\,dx}$$

Τέλος θεωρούμε μια συνεχή $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ για το οποίο υπάρχουν τα όρια

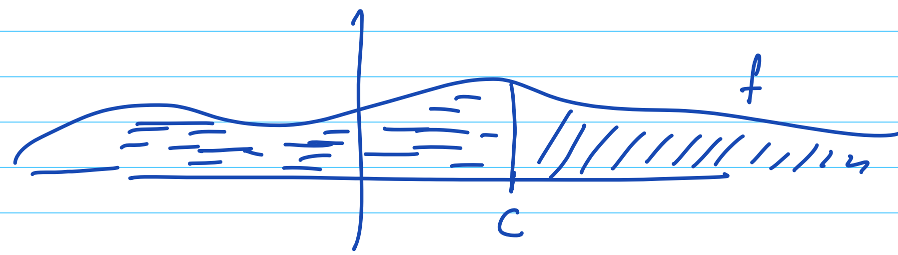
$$\underbrace{\lim_{R \to -\infty} \int_R^c f(x)\,dx}_{\in \mathbb{R}} \quad \text{και} \quad \underbrace{\lim_{R \to +\infty} \int_c^R f(x)\,dx}_{\in \mathbb{R}}$$

Δηλαδή υποθέτουμε ότι ορίζονται τα

$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ και $\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$ για κάποιο $c \in \mathbb{R}$.

Τότε ορίζουμε

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx}$$



Αποδεικνύεται ότι το πιο πάνω είναι ανεξάρτητο του c. Δηλαδή αν για κάποιο $c \in \mathbb{R}$ ορίζονται τα $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ και

$\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$ τότε για κάθε $d \in \mathbb{R}$ ορίζονται επίσης τα $\int_{-\infty}^{d} f(x)\,dx$ και $\int_{d}^{+\infty} f(x)\,dx$

και μάλιστα ισχύει

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{d} f(x)\,dx + \int_{d}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Τα $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$, $\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

ονομάζονται γενικευμένα ολοκληρώματα α' είδους.

Παραδείγματα:

1) $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$.

Θεωρούμε $R > 1$. Τότε

$$\int_1^R \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^R = -\frac{1}{R} + \frac{1}{1}$$

$$= 1 - \frac{1}{R} \xrightarrow[R \to +\infty]{} 1$$

Άρα $I = \lim\limits_{R \to +\infty} \int_1^R \frac{1}{x^2}\, dx$

$$= \lim_{R \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{R}\right) \longrightarrow 1$$

2) $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$

Θεωρούμε $R > 1$.

$$\int_1^R \frac{1}{x}\, dx = \ln x \Big|_1^R = \ln R - \ln 1$$

$$= \ln R \xrightarrow[R \to +\infty]{} +\infty$$

Άρα δεν ορίζεται το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$.

3) $I = \int_{-\infty}^{0} e^{2x}\, dx$.

Θεωρούμε $R < 0$.

$$\int_R^0 e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}\int_{2R}^{0} e^u\, du$$

$u = 2x$

$x = 0 \quad u = 0$

$x = R \quad u = 2R$

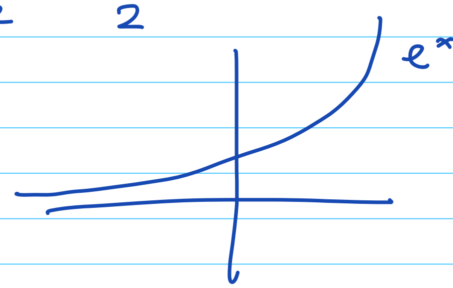
$du = 2\, dx$

$$= \frac{1}{2} e^u \Big|_{2R}^{0}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^0 - e^{2R}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot e^{2R}$$

$$e^{2R} \xrightarrow{R \to -\infty} 0$$



Άρα $\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\, dx$

$$= \lim_{R \to -\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{2R}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}.$$

Γενικευμένα ολοκληρώματα β' είδους:

Θεωρούμε ότι έχουμε μια συνεχή συνάρτηση $f: (a, b] \to \mathbb{R}$ η οποία δεν έχει συνεχή επέκταση στο $x = a$.

[Π.χ. $f: (0, 1] \to \mathbb{R}: f(x) = \frac{1}{x}$.]

Υποθέτουμε ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{r \to a^+} \int_r^b f(x)\,dx.$$

Τότε ορίζουμε

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{r \to a^+} \int_r^b f(x)\,dx}$$

Η περίπτωση $f: [a, b) \to \mathbb{R}$ όπου η f δεν έχει συνεχή επέκταση στο $x = b$ αντιμετωπίζεται ανάλογα:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{r \to b^-} \int_a^r f(x)\,dx}$$

Τέλος θεωρούμε $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ η οποία δεν έχει συνεχή επέκταση στο $x = a$ και στο $x = b$.

[π.χ. $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}: f(x) = \tan x$]

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $c \in (a, b)$

έτσι ώστε να υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{r \to a^+} \int_r^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$ και

$$\lim_{r \to b^-} \int_c^r f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx .$$

Τότε ορίζουμε

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

Όπως πριν αποδεικνύεται ότι το πιο πάνω είναι ανεξάρτητο του c.

Τα $\int_a^b f(x)\,dx$ όπου η f δεν έχει συνεχή επέκταση σε κάποιο/α από τα a, b λέγονται γενικευμένα ολοκληρώματα β' είδους.