Περίπτωση 3: $\deg p = 1 \quad \deg q = 2$

$p(x) = Ax + B, \quad A \neq 0$
$q(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$

Μέθοδος: Προσπαθούμε να σχηματίσουμε την παράγωγο $q'(x)$ στον αριθμητή του κλάσματος $\frac{p(x)}{q(x)}$.

Τότε το $I = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ υπολογίζεται με τη βοήθεια του $\ln$ και της Περίπτωσης 2.

$q'(x) = 2ax + b$

$$p(x) = Ax + B = \frac{A}{2a}\left(2ax + \frac{2a}{A}\cdot B\right)$$

$$= \frac{A}{2a}\left(2ax + b + \frac{2aB}{A} - b\right)$$

Άρα $$I = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{q(x)}\,dx + \frac{A}{2a}\int \frac{\frac{2aB}{A} - b}{q(x)}\,dx$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{q'(x)}{q(x)}\,dx + \frac{A}{2a}\int \frac{k}{q(x)}\,dx$$

$$k = \frac{2aB}{A} - b$$

$$= \frac{A}{2a}\ln|q(x)| + \underbrace{\frac{A}{2a}\int \frac{k}{q(x)}\,dx}_{\text{Περίπτωση 2}}$$

Παραδείγματα:

1) $I = \int \frac{x}{x^2+2x+3}\,dx$

$(x^2+2x+3)' = 2x+2$

$\frac{x}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2x+2-2}{x^2+2x+3}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x+2}{x^2+2x+3} - \frac{2}{x^2+2x+3}\right)$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+2x+3)'}{x^2+2x+3} - \frac{1}{x^2+2x+3}$

$I = \frac{1}{2}\int\frac{(x^2+2x+3)'}{x^2+2x+3}\,dx - \int\frac{1}{x^2+2x+3}\,dx$

$= \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3| - J$

Το J υπολογίζεται όπως στην Περίπτωση 2.

$q(x) = x^2+2x+3$, $\Delta = 2^2-4\cdot 3 = -8<0$

(άρα $q(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$)

$x^2+2x+3 = x^2+2x+1+2$
$= (x+1)^2+(\sqrt{2})^2$

Άρα $J = \int\frac{1}{q(x)}\,dx = \int\frac{1}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}\,dx$

$u = x+1, \quad du = dx$

$$J = \int \frac{1}{u^2 + (\sqrt{2})^2} \, du = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} - c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) - c$$

Άρα

$$I = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c$$

$c \in \mathbb{R}$.

2) $$I = \int \frac{x+2}{x^2-4x+4} \, dx$$

$$(x^2-4x+4)' = 2x-4$$

$$\frac{x+2}{x^2-4x+4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+4}{x^2-4x+4}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-4+8}{x^2-4x+4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-4}{x^2-4x+4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{x^2-4x+4}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2-4x+4)'}{x^2-4x+4} + \frac{4}{x^2-4x+4}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2-4x+4)'}{x^2-4x+4} \, dx + 4 \int \frac{1}{x^2-4x+4} \, dx$$

$= \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+4| + 4J$

$q(x) = x^2-4x+4 = (x-2)^2$

$J = \int \frac{1}{q(x)}dx = \int \frac{1}{(x-2)^2}dx$

$u = x-2$ $\quad J = \int \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u}$

$du = dx$

$= -\frac{1}{x-2}$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\ln|(x-2)^2| - \frac{4}{x-2} + c$

$= \frac{1}{2}\ln(x-2)^2 - \frac{4}{x-2} + c$

$= \frac{1}{2}\cdot 2\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} + c$

$= \ln|x-2| - \frac{4}{x-2} + c$

Οι περιπτώσεις 4) και 5) ανάγονται στις προηγούμενες.

Γενική Μέθοδος:

Θεωρούμε το κλάσμα $\frac{p(x)}{q(x)}$ όπου τα p, q είναι πολυώνυμα με $\deg p < \deg q$.

Παραγοντοποιούμε $q(x)$.

- Σε κάθε παράγοντα της μορφής $(x-a)^n$ αντιστοιχεί ένα άθροισμα κλασμάτων της μορφής:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

- Σε κάθε παράγοντα της μορφής $(x^2+bx+c)^m$, όπου η διακρίνουσα του x^2+bx+c είναι αρνητική, αντιστοιχεί ένα άθροισμα κλασμάτων της μορφής

$$\frac{B_1x+\Gamma_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+\Gamma_2}{(x^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{B_mx+\Gamma_m}{(x^2+bx+c)^m}$$

Παραδείγματα:

1) $$\frac{2x}{(x^2+9)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+9}$$

2) $$\frac{2x}{(x^2+9)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1x+\Gamma_1}{x^2+9} + \frac{B_2x+\Gamma_2}{(x^2+9)^2}$$

Εκτός των περιπτώσεων 4) και 5)

3) $$\frac{2x}{(x^2+9)(x-1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+9}$$

Παράδειγμα:

$$I = \int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} \, dx$$

$$\frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+1}$$

$$= \frac{A_1(x+1)(x^2+1) + A_2(x^2+1) + (Bx+\Gamma)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

Αριθμητής $= A_1(x^3+x+x^2+1)$

$+ A_2x^2 + A_2 + (Bx+\Gamma)(x^2+2x+1)$

$= A_1x^3 + A_1x^2 + A_1x + A_1 + A_2x^2 + A_2$
$+ Bx^3 + 2Bx^2 + Bx + \Gamma x^2 + 2\Gamma x + \Gamma$

$= (A_1+B)x^3 + (A_1+A_2+2B+\Gamma)x^2$
$+ (A_1+B+2\Gamma)x + A_1+A_2+\Gamma$
$= x$

$A_1 + B = 0$ (1)
$A_1 + A_2 + 2B + \Gamma = 0$ (2)
$A_1 + B + 2\Gamma = 1$ (3)
$A_1 + A_2 + \Gamma = 0$ (4)

Από (1) και (3) παίρνουμε $2\Gamma = 1 \Rightarrow \Gamma = \frac{1}{2}$

Από (1) και (4): $(A_1 + A_2 + \Gamma) + 2B = 0$
$0 + 2B = 0$
$B = 0$

Από (1): $A_1 = -B = 0$

Από (4) : $0 + A_2 + \frac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow A_2 = -\frac{1}{2}$

Άρα $\frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{0}{x+1} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$

$+ \frac{0 \cdot x + 1/2}{x^2+1}$

$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1}$

I

Άρα $\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+1)^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx$

$I_1 = \int \frac{1}{(x+1)^2} dx$, $u = x+1$, $du = dx$

$= \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{x+1}$

$I_2 = \int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x$

$\Rightarrow I = -\frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_2$

$= -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{2} \arctan x + c$

$$= \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2} \cdot \arctan x + C$$