Σύγκλιση ακολουθιών:

Ορολογία: Λέμε ότι μια ιδιότητα P που αναφέρεται σε φυσικούς αριθμούς ισχύει σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ ή τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ αν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $P(n)$.

Παραδείγματα:

1) $A = \{5, 8, 21, 63\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1000\}$

Τότε ισχύει $n \in A$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

2) $A = \{2, 5, 7\}$

Αν το A περιείχε σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ θα ήταν άπειρο, αλλά το A είναι πεπερασμένο.

3) $A = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$

Το A δεν περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ γιατί για κάθε $n_0 \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \geq n_0$ που δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή $n \notin A$.

Ένα τέτοιο n είναι το $3n_0 + 1$.

Γενικά ισχύει το εξής:

το A περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ αν και μόνο αν το σύνολο $\mathbb{N} \setminus A$ είναι πεπερασμένο.

$$\mathbb{N} \setminus A \downarrow \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A\}$$

Στα πιο πάνω παραδείγματα:

- αν $A = \{5, 8, 21, 63\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1000\}$

  τότε $\mathbb{N} \setminus A = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, \ldots, 20, 22, \ldots, 62, 64, \ldots, 999\}$

  πιο απλά $\mathbb{N} \setminus A \subseteq \{0, \ldots, 999\}$

  άρα $\mathbb{N} \setminus A$: πεπερασμένο

  άρα το A περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

- αν $A = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$

  τότε $\underbrace{\{3k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}}_{\text{άπειρο}} \subseteq \mathbb{N} \setminus A$

άρα $\mathbb{N} \setminus A$ είναι άπειρο

άρα το A δεν περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Διαισθητική περιγραφή του ορίου ακολουθίας

Παίρνουμε $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

Θεωρούμε ένα μικρό διάστημα κέντρου 0 π.χ. $I_1 = (-10^{-2}, 10^{-2}) = (-\frac{1}{100}, \frac{1}{100})$.

Εξετάζουμε για ποια $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_n \in I_1$.

$n = 1$ $\quad a_1 = 1 \notin I_1$

$n = 2$ $\quad a_2 = \frac{1}{2} \notin I_1$

$n = 3$ $\quad a_3 = \frac{1}{3} \notin I_1$

$\vdots$

$n = 99$ $\quad a_{99} = \frac{1}{99} \notin I_1 = (-\frac{1}{100}, \frac{1}{100})$

$n = 100$ $\quad a_{100} = \frac{1}{100} \notin I_1$

$n = 101$ $\quad a_{101} = \frac{1}{101} \in (-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}) = I_1$

$n = 102$ $\quad a_{102} = \frac{1}{102} \in I_1$

$n \geq 101$ $\quad a_n = \frac{1}{n} < \frac{1}{100}$

$\Rightarrow a_n \in I_1$.

Άρα ισχύει $a_n \in I_1$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Αν πάρουμε $I_2 = \left(-\frac{1}{1000}, \frac{1}{1000}\right)$ έχουμε $a_n \in I_2$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ (συγκεκριμένα για όλα τα $n \geq 1001$).

<u>Αυστηρός ορισμός:</u> (Όριο ακολουθίας)

Θεωρούμε μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$.

Η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ <u>συγκλίνει στο a</u>

ή αλλιώς το a είναι το όριο της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, συμβολικά $a_n \to a$

ή $a_n \xrightarrow{n\to+\infty} a$ ή $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$, αν

για κάθε ανοικτό διάστημα I κέντρου a ισχύει $a_n \in I$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Ισοδύναμα: για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Ισοδύναμα: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$.

<u>Παράδειγμα:</u>

$a_n = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$

Ισχυριζόμαστε ότι $a_n \to 0$.

Θεωρούμε $\varepsilon > 0$.

[Στο πρόχειρο: θέλουμε $|a_n - 0| < \varepsilon$

$\Leftarrow\!\Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Leftarrow\!\Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftarrow\!\Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

Αν $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ τότε για κάθε $n \geq n_0$

θα έχουμε $n > \frac{1}{\varepsilon}$]

Από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

Τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > \frac{1}{\varepsilon}$

και άρα $|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right|$

$= \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Υπακολουθίες

Θεωρούμε μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Επιλέγουμε άπειρους όρους της ακολουθίας δηλαδή επιλέγουμε άπειρα $n \in \mathbb{N}$ και κάνουμε αυτή την επιλογή με αύξοντα τρόπο στο n.

Π.χ. $2, 5, 10, 17, \ldots, n^2+1, \ldots$

Τότε σχηματίζεται μια καινούργια ακολουθία, η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ όπου

$b_1 = a_2,\ b_2 = a_5,\ b_3 = a_{10},\ b_4 = a_{17} \ldots$

$\ldots \quad b_n = a_{n^2+1}, \ldots$

Ορισμός: Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και φυσικοί αριθμοί: $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$

Θέτουμε $b_n = a_{k_n}$, $n \geq 1$.

Τότε η ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ονομάζεται υπακολουθία της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και συμβολίζεται πιο απλά με $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε $k_n = n^2+1$, $n \geq 1$.

Άλλα παραδείγματα υπακολουθιών:

$(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\underset{k_n = n}{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}}$, $(a_{3n+5})_{n\in\mathbb{N}^*}$

$\underset{k_n = n+1}{(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}}$

Για $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ έχουμε

$$a_{3n+5} = \frac{1}{3n+5}, \quad n \geq 1.$$

Θεμελιώδεις ιδιότητες ορίων:

1) Μοναδικότητα ορίου:

αν $a_n \to a$ και $a_n \to b$

τότε $a = b$.

2) Αν $a_n \to a$ τότε για κάθε υπακολουθία $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ ισχύει $a_{k_n} \to a$.

Μάλιστα ισχύει και το αντίστροφο.

3) Αν η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι σταθερή ακολουθία $a_n = c \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ τότε $a_n \to c$.

4) Απόλυτη τιμή.

Αν $a_n \to a$ τότε $|a_n| \to |a|$

Ισχύει $a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0$

Γενικά όμως δεν ισχύει ότι αν $|a_n| \to |a|$ τότε $a_n \to a$.

5) Άθροισμα - Γινόμενο

$a, b \in \mathbb{R}$

Αν $a_n \to a$ και $b_n \to b$

τότε
$$a_n + b_n \to a+b$$
$$a_n - b_n \to a-b$$
$$a_n \cdot b_n \to a\cdot b$$

Αν επιπλέον $b \neq 0$ τότε ισχύει
$b_n \neq 0$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$

και $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b}$.

Επιπλέον αν $a_n \to a$ τότε
$c \cdot a_n \to c \cdot a$, $c \in \mathbb{R}$.

6) k-οστη ρίζα, $k = 2, 3, \ldots$

Αν $a_n \to a$ και $a_n \geq 0$ για κάθε $n \geq 1$
τότε $a \geq 0$ και

$$\sqrt[k]{a_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt[k]{a}, \quad k = 2, 3, \ldots .$$

(Για περιττό k δεν χρειάζεται
να υποθέσουμε ότι $a_n \geq 0$ για κάθε $n \geq 1$)

7) Αν $x \leq a_n \leq y$ για κάθε $n \geq 1$
$(x, y \in \mathbb{R})$

και αν $a_n \to a$, τότε

$$x \leq a \leq y.$$

8) Κριτήριο Παρεμβολής

Αν $a_n \leq c_n \leq b_n$ για κάθε $n \geq 1$

και αν $a_n \to a$, $b_n \to a$, $a \in \mathbb{R}$

τότε $c_n \to a$.

Παραδείγματα

1) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + 1, \quad n \geq 1$

$\frac{1}{n} \to 0$, άρα $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0 \cdot 0 = 0$

όμοια $\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

Άρα $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + 1 \to 0 + 0 + 1 = 1$

2) $a_n = \frac{n^2 + 3n + 1}{6n^2 - 4n + 8}, \quad n \geq 1.$

$$a_n = \frac{n^2 \cdot \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \cdot \left(6 - \frac{4}{n} + \frac{8}{n^2}\right)} = \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{6 - \frac{4}{n} + \frac{8}{n^2}}$$

$$\longrightarrow \frac{1 + 3 \cdot 0 + 0}{6 - 4 \cdot 0 + 8 \cdot 0} = \frac{1}{6}.$$

3) $a_n = \frac{\sin n}{n}, \quad n \geq 1.$

Έχουμε $-1 \leq \sin n \leq 1$

άρα $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$

$\frac{1}{n} \to 0$, $-\frac{1}{n} \to 0$

Από το Κριτήριο Παρεμβολής $\frac{\sin n}{n} \to 0$.

4) $a_n = \dfrac{4}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}}$

$\frac{1}{n^2} \to 0$, $\frac{1}{n^2}+1 \to 1$

$\sqrt{\frac{1}{n^2}+1} \to \sqrt{1} = 1$

άρα $\dfrac{4}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}} \to \frac{4}{1} = 4$

Αξιοσημείωτα όρια:

1) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ με $|a| < 1$

ισχύει $a^n \to 0$.

Π.χ. $\frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$

2) $\sqrt[n]{n} \to 1$

γενικότερα αν p είναι πολυώνυμο
με $p(x) \geq 1$ για κάθε $x \geq 1$

τότε $\sqrt[n]{p(n)} \to 1$.

π.χ. $\sqrt[n]{n^7 + n^6 + n^2} \to 1$

3) Αν $a > 0$ τότε $\sqrt[n]{a} \to 1$

π.χ. $\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \to 1$

$\sqrt[n]{412} \to 1$.