Κεφάλαιο 4 Ακολουθίες - Σειρές

Ορισμός: Ακολουθία σε ένα σύνολο $X \neq \emptyset$ είναι μία συνάρτηση $\varphi : \mathbb{N}^* \to X$ όπου $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Εδώ θα έχουμε $X = \mathbb{R}$, δηλαδή θα μιλάμε για ακολουθίες πραγματικών αριθμών.

Συμβολισμός: Αντί να γράφουμε $\varphi : \mathbb{N}^* \to X$ γράφουμε $a_n = \varphi(n) =$ η τιμή της φ στο $n \in \mathbb{N}^*$ και συμβολίζουμε τη φ με $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Επίσης μπορούμε να συμβολίσουμε μια ακολουθία με $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ κ.τ.λ.

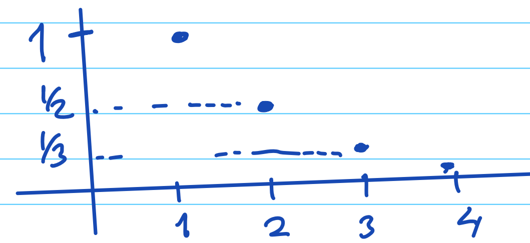
Τέλος όταν ορίζουμε τις ακολουθίες ~~γράφουμε~~ ορίζουμε συνήθως την τιμή a_n.

Δηλαδή γράφουμε $a_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Όταν θέλουμε να αναπαραστήσουμε μια ακολουθία πραγματικών αριθμών με σχήμα, δεν κάνουμε τη γραφική της παράσταση αλλά αναπαριστούμε κάποια a_n πάνω σε μια ευθεία γραμμή.

Π.χ. $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Γραφική παράσταση:



$a_1 = 1$

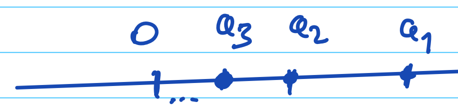
$a_2 = \frac{1}{2}$

$a_3 = \frac{1}{3}$

$a_4 = \frac{1}{4}$

(Αναπαράσταση σε ευθεία γραμμή)

Συνήθως έχουμε:



Το a_n λέγεται όρος της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και ειδικότερα n-οστός όρος.

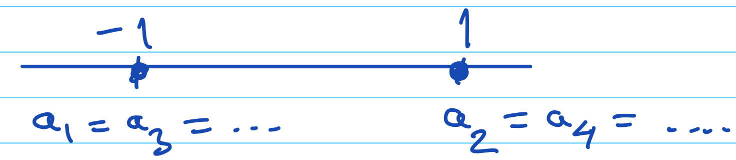
Τέλος όταν έχουμε το σύμβολο «n» εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά θα εννοούμε φυσικό αριθμό.

Επομένως γράφουμε συνήθως $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

Παραδείγματα:

1) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n^2+n+1}$, $n \geq 1$

2) $a_n = (-1)^n \ , \quad n \geq 1$



3) $$a_n = \begin{cases} n^2, & n: \text{άρτιος} \\ 0, & n: \text{περιττός} \end{cases}$$

Μονότονες ακολουθίες:

Ορισμός: Δίνεται μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ λέγεται:

α) **αύξουσα** αν για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $a_n \leq a_{n+1}$

(που είναι ισοδύναμο με το εξής: για κάθε $n, m \in \mathbb{N}^*$ αν $n \leq m$ τότε $a_n \leq a_m$)

β) **γνησίως** ή **γνήσια αύξουσα** αν για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $a_n < a_{n+1}$.

γ) **φθίνουσα** αν για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $a_n \geq a_{n+1}$

δ) <u>γνησίως</u> ή <u>γνήσια</u> <u>φθίνουσα</u>
αν για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει
$a_n > a_{n+1}$.

<u>Συμβολισμοί:</u> $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \uparrow$: αύξουσα

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \uparrow$: γνησίως αύξουσα

όμοια χρησιμοποιούμε τα $\downarrow$ και $\downarrow$ για τις φθίνουσες και γνησίως φθίνουσες ακολουθίες αντίστοιχα.

<u>Παραδείγματα:</u>

1) $a_n = \sqrt{n^2+1}$, $n \geq 1$

Για κάθε $n \geq 1$ έχουμε

$n^2 < (n+1)^2$

άρα $n^2+1 < (n+1)^2+1$

άρα $\sqrt{n^2+1} < \sqrt{(n+1)^2+1}$

δηλαδή $a_n < a_{n+1}$,

Άρα $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \uparrow$.

2) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$

$a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 3$.

(Δηλαδή $a_n = \begin{cases} 1, & n = 1,2 \\ \frac{1}{n}, & n \geq 3 \end{cases}$)

Ισχύει $a_1 \geq a_2$

και για $n \geq 2$ ισχύει $a_n > a_{n+1}$.

Άρα $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \downarrow$.

Η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ δεν είναι γνησίως φθίνουσα.

3) $a_n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}^*$.

Δείχνουμε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ δεν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

- Δεν είναι αύξουσα: βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}^*$ με $a_n \not\leq a_{n+1}$ δηλαδή $a_n > a_{n+1}$.

  Εδώ έχουμε $a_{456} = 1 > -1 = a_{457}$

  (πιο απλά $a_2 = 1 > -1 = a_3$)

- Δεν είναι φθίνουσα: βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}^*$ με $a_n \not\geq a_{n+1}$, δηλαδή $a_n < a_{n+1}$.

  Εδώ έχουμε $a_{457} = -1 < a_{458}$.

<u>Μονότονη</u> ακολουθία είναι η ακολουθία

που είναι αύξουσα ή φθίνουσα και

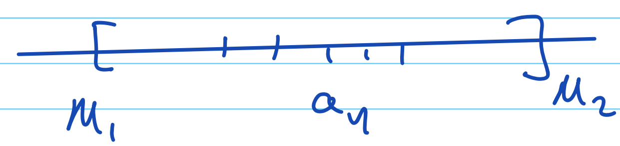
γνησίως μονότονη είναι η ακολουθία που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Φραγμένες ακολουθίες:

Ορισμός: Μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ λέγεται:

α) **φραγμένη** αν υπάρχει $M\in\mathbb{R}$ με την ιδιότητα για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ να ισχύει $|a_n|\le M$,

Ισοδύναμα: υπάρχουν $M_1, M_2\in\mathbb{R}$ με $M_1<M_2$ έτσι ώστε για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ να ισχύει $a_n\in[M_1,M_2]$.



β) **άνω φραγμένη** αν υπάρχει $M\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ να ισχύει $a_n\le M$

γ) **κάτω φραγμένη** αν υπάρχει $M\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ να ισχύει $a_n\ge M$.