Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

10ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Άσκηση 1.

(i) Βρείτε τις σειρές Maclaurin των συναρτήσεων

$$f(x) = e^{-x},\ x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = x \cdot e^{-x},\ x \in \mathbb{R} \qquad h(x) = e^{-x^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Βρείτε τις παραγώγους $f^{(6)}(0)$, $g^{(6)}(0)$, $h^{(6)}(0)$ και $h^{(7)}(0)$.

Λύση.

Χρησιμοποιούμε τον τύπο ανάπτυξης σε δυναμοσειρά της συνάρτησης e^x και έχουμε

$$f(x) = e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^n$$

$$g(x) = x \cdot e^{-x} = x \cdot f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1}$$

$$h(x) = e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{2n}.$$

Για την εύρεση των παραγώγων έκτης τάξης στο 0 χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$\frac{F^{(n)}(0)}{n!} = a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

όπου $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ για x σε κάποιο ανοικτό διάστημα I κέντρου 0. Πιο απλά:

$$\boxed{\frac{F^{(n)}(0)}{n!} = \text{ ο συντελεστής του } x^n \text{ στο ανάπτυγμα Taylor με κέντρο το } 0.}$$

Επομένως

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!} = \text{συντελεστής του } x^6 = \frac{(-1)^6}{6!} = \frac{1}{6!}\ .$$

Άρα $f^{(6)}(0) = 1$.

Σχετικά με την τιμή $g^{(6)}(0)$ πρέπει να προσέξουμε ότι **δεν είναι σωστό** να πάρουμε την τιμή που προκύπτει από το $\frac{(-1)^n}{n!}$ για $n = 6$ και να την πολλαπλασιάσουμε με 6!. Αυτό συμβαίνει γιατί για $n = 6$ στο ανάπτυγμα $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1}$ θα πάρουμε το συντελεστή του x^7.

1ος τρόπος (ο πιο απλός): Για να βρούμε την τιμή $g^{(6)}(0)/6!$ παίρνουμε τον **συντελεστή του** x^6 στο ανάπτυγμα της g. Στο ανάπτυγμα $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1}$ το x^6 επιτυγχάνεται για $n = 5$, οπότε

$$\frac{g^{(6)}(0)}{6!} = \frac{(-1)^5}{5!} \quad \text{και άρα} \quad g^{(6)}(0) = \frac{(-1)^5}{5!} \cdot 6! = -6.$$

2ος τρόπος: Φέρνουμε το ανάπτυγμα $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1}$ στη μορφή $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ για κάποια b_n, $n \in \mathbb{N}$. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1} \\ &= \qquad \frac{(-1)^0}{0!} \cdot x^1 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1} + \ldots \\ &= 0 \cdot x^0 + \frac{(-1)^0}{0!} \cdot x^1 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1} + \ldots . \end{aligned}$$

Επομένως ορίζουμε $b_0 = 0$ και $b_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n!}$. Τότε

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \cdot x^0 + \frac{(-1)^0}{0!} \cdot x^1 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1} + \ldots \\ &= b_0 \cdot x^0 + b_1 \cdot x^1 + \cdots + b_{n+1} \cdot x^{n+1} + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n. \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{g^{(6)}(0)}{6!} = b_6 = \frac{(-1)^5}{5!} \quad \text{και επομένως} \quad g^{(6)}(0) = \frac{(-1)^5}{5!} \cdot 6! = -6.$$

Για την τιμή $h^{(6)}(0)$ παίρνουμε τον συντελεστή του x^6 στο ανάπτυγμα της h (ακολουθούμε τον πρώτο από τους πιο πάνω τρόπους). Το x^6 επιτυγχάνεται για $n = 3$ στο ανάπτυγμα $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{2n}$, άρα

$$\frac{h^{(6)}(0)}{6!} = \frac{(-1)^3}{3!} \quad \text{και άρα} \quad h^{(6)}(0) = \frac{(-1)^3}{3!} \cdot 6! = -4 \cdot 5 \cdot 6 = -120.$$

Τέλος για την τιμή $h^{(7)}(0)$ παρατηρούμε ότι στο πιο πάνω ανάπτυγμα προκύπτουν μόνο δυνάμεις με άρτιο εκθέτη. Επομένως η δύναμη x^7 δεν εμφανίζεται ή αλλιώς ο συντελεστής του x^7 είναι 0. Συνεπώς

$$\frac{h^{(7)}(0)}{7!} = 0 \quad \text{και} \quad h^{(7)}(0) = 0.$$

Άσκηση 2. Δίνεται $\rho \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $\rho > 1$ τότε

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\rho}}\, dx = \frac{1}{\rho - 1}\,,$$

ενώ αν $\rho \leq 1$ το πιο πάνω γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν ορίζεται.

Λύση.

Υποθέτουμε ότι $\rho > 1$ και θεωρούμε $R > 1$. Τότε

$$\int_1^R \frac{1}{x^\rho}\,dx = \int_1^R x^{-\rho}\,dx = \frac{x^{-\rho+1}}{-\rho+1}\Big|_1^R = \frac{1}{1-\rho}\cdot\left(R^{-\rho+1}-1\right) = \frac{1}{\rho-1}\cdot\left(1-\frac{1}{R^{\rho-1}}\right).$$

Επειδή $\rho > 1$ έχουμε $\lim\limits_{R\to\infty} R^{\rho-1} = \infty$ και συνεπώς

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^{\rho-1}} = 0.$$

Άρα

$$\lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^\rho}\,dx = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\rho-1}\cdot\left(1-\frac{1}{R^{\rho-1}}\right) = \frac{1}{\rho-1}\cdot(1-0) = \frac{1}{\rho-1}.$$

Καταλήγουμε ότι

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^\rho}\,dx = \frac{1}{\rho-1}.$$

Αν $\rho < 1$ τότε $1-\rho > 0$ και $\lim\limits_{R\to\infty} R^{-\rho+1} = +\infty$. Όπως πιο πάνω έχουμε

$$\int_1^R \frac{1}{x^\rho}\,dx = \frac{1}{1-\rho}\cdot\left(R^{-\rho+1}-1\right)$$

για κάθε $R > 1$ και άρα

$$\lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^\rho}\,dx = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{1-\rho}\cdot\left(R^{-\rho+1}-1\right) = +\infty.$$

Επομένως το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho}\,dx$ δεν ορίζεται για $\rho < 1$. (Κάποια συγγράμματα αναφέρουν $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho}\,dx = +\infty$ όταν $\rho < 1$.)

Τέλος αν $\rho = 1$,

$$\lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^\rho}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\ln(x)\Big|_1^R = \lim_{R\to\infty}\ln(R) = \infty.$$

Συνεπώς πάλι δεν ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho}\,dx$.

Άσκηση 3. Δείξτε με τη βοήθεια του Ολοκληρωτικού Κριτηρίου ότι για κάθε $\rho > 0$ η σειρά

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\rho}$$

συγκλίνει αν και μόνο αν $\rho > 1$.

Λύση.

Θεωρούμε $\rho > 0$ και τη συνάρτηση $f : [1,\infty) \to \mathbb{R} : f(x) = \dfrac{1}{x^\rho}$. Η f παίρνει θετικές τιμές και είναι συνεχής. Επιπλέον είναι γνησίως φθίνουσα: έχουμε $x^\rho = e^{\rho\cdot\ln x}$, οι συναρτήσεις $\exp$ και $\ln$ είναι γνησίως αύξουσες και $\rho > 0$, άρα η $x \mapsto x^\rho$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα. Από το Ολοκληρωτικό Κριτήριο η σειρά

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\rho}$$

συγκλίνει αν και μόνο αν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^\rho}\,dx.$$

Από την Άσκηση 2 το προηγούμενο ολοκλήρωμα υπάρχει στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\rho > 1$. Επομένως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\rho}}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\rho > 1$.

Άσκηση 4 (Ολοκληρωτικό Κριτήριο)**.** Εξετάστε τις σειρές

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$$

ως προς τη σύγκλιση.

Λύση.
Εφαρμόζουμε το Ολοκληρωτικό Κριτήριο. Στην πρώτη σειρά θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f : [2, \infty) \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x} .$$

Οι συναρτήσεις $x \mapsto x$ και $x \mapsto \ln x$ είναι γνησίως αύξουσες και θετικές στο $[2, \infty)$, συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα και θετική.

Από το Ολοκληρωτικό Κριτήριο η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν ορίζεται το ολοκλήρωμα $\int_2^{\infty} f(x)\, dx$.

Θεωρούμε $R > 2$. Τότε

$$\int_2^R f(x)\, dx = \int_2^R \frac{1}{x \cdot \ln x}\, dx.$$

Παρατηρούμε ότι $1/x = (\ln x)'$. Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = \ln x$ και έχουμε $du = \frac{1}{x} dx$ αλλιώς $dx = x du$.

Άρα

$$\int_2^R f(x)\, dx = \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{1}{u}\, du = \ln u \Big|_2^{\ln R} = \ln(\ln R) - \ln(\ln 2).$$

Έχουμε

$$\lim_{R\to\infty} \ln R = \infty \quad \text{και} \quad \lim_{R\to\infty} \ln(\ln R) = \infty.$$

Καταλήγουμε

$$\lim_{R\to\infty} \int_2^R f(x)\, dx = \lim_{R\to\infty} (\ln(\ln R) - \ln(\ln 2)) = \infty.$$

Επομένως δεν ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_2^{\infty} f(x)\, dx$ και άρα η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$$

αποκλίνει.

Στη δεύτερη σειρά θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g : [2, \infty) \to \mathbb{R} : g(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} .$$

Όπως και με την f η συνάρτηση g είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και θετική. Από το Ολοκληρωτικό Κριτήριο η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} g(n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν ορίζεται το ολοκλήρωμα $\int_2^{\infty} g(x)\, dx$.

Θεωρούμε $R > 2$. Τότε

$$\int_2^R g(x)\, dx = \int_2^R \frac{1}{x \cdot \ln^2 x}\, dx.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = \ln x$ και έχουμε $du = \frac{1}{x} dx$ αλλιώς $dx = x du$.

Άρα

$$\int_2^R g(x)\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}\Big|_{\ln 2}^{\ln R} = -\frac{1}{\ln R} + \frac{1}{\ln 2}\,.$$

Έχουμε

$$\lim_{R\to\infty} \ln R = \infty \quad \text{και} \quad \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\ln R} = 0.$$

Καταλήγουμε

$$\lim_{R\to\infty} \int_2^R g(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln R}\right) = \frac{1}{\ln 2}\,.$$

Επομένως ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_2^\infty g(x)\,dx$ και άρα η σειρά

$$\sum_{n=2}^\infty g(n) = \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\cdot \ln^2 n}$$

συγκλίνει.

Άσκηση 5. Βρείτε τα εξής αόριστα ολοκληρώματα:

$$I = \int \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx \qquad J = \int \frac{x}{(x+1)(x-2)}\,dx.$$

Λύση.
Το πολυώνυμο x^2+2x-3 έχει δύο πραγματικές ρίζες, τις $x=1$ και $x=-3$, επομένως $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$. Αναλύουμε το κλάσμα $1/(x^2+2x-3)$ σε πιο απλά κλάσματα:

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}\,.$$

Έχουμε $A(x+3)+B(x-1) = Ax+3A+Bx-B = (A+B)x+3A-B$. Προκύπτει το σύστημα εξισώσεων

$$A+B=0$$
$$3A-B=1.$$

Τότε $B=-A$ και

$$3A-(-A)=1 \iff 4A=1 \iff A=\frac{1}{4}.$$

Άρα

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+3}.$$

Συνεπώς

$$I = \frac{1}{4}\cdot\int\frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{4}\cdot\int\frac{1}{x+3}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\ln|x-1| - \frac{1}{4}\cdot\ln|x+3| + c.$$

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα ο παρονομαστής είναι παραγοντοποιημένος. Απαλείφουμε τον x από τον αριθμητή με τον εξής απλό τρόπο,

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)} = \frac{x+1}{(x+1)(x-2)} - \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x+1)(x-2)}\,.$$

Αναλύουμε το τελευταίο κλάσμα,

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2}\,.$$

Άρα

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}$$

και συνεπώς

$$J = \frac{2}{3}\cdot\int\frac{1}{x-2}\,dx + \frac{1}{3}\cdot\int\frac{1}{x+1}\,dx = \frac{2}{3}\cdot\ln|x-2| + \frac{1}{3}\cdot\ln|x+1| + c.$$

Άσκηση 6. Βρείτε τα εξής αόριστα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+4}\,dx \qquad I_2 = \int \frac{1}{3x^2+1} \qquad I_3 = \int \frac{1}{x^2-4x+7}\,dx.$$

Λύση.
Έχουμε

$$\frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x/2)^2+1}\,.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = x/2$ και έχουμε $dx = 2du$. Οπότε

$$I_1 = \frac{1}{4}\cdot\int\frac{1}{u^2+1}\cdot 2\,du = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{u^2+1}\,du = \arctan(u)+c = \frac{1}{2}\cdot\arctan(x/2)+c.$$

Σχόλιο. Στο πιο πάνω ολοκλήρωμα (όπως και αρκετά επόμενα) θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε κατευθείαν τον τύπο

$$\int\frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\cdot\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

όπου $a \neq 0$.

Σχετικά με το δεύτερο ολοκλήρωμα,

$$\frac{1}{3x^2+1} = \frac{1}{(\sqrt{3}x)^2+1}\,.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = \sqrt{3}x$ και έχουμε $dx = 1/\sqrt{3}du$. Οπότε

$$I_2 = \int\frac{1}{(\sqrt{3}x)^2+1}\,dx = \int\frac{1}{u^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\,du = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\arctan(u)+c = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\arctan(\sqrt{3}x)+c.$$

Τέλος στο τρίτο ολοκλήρωμα παρατηρούμε αρχικά ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου x^2-4x+7 είναι αρνητική, επομένως μπορούμε να το φέρουμε στη μορφή $(ax-b)^2+c^2$ ή πιο απλά $(x-b)^2+c^2$ γιατί ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου είναι η μονάδα. Έχουμε

$$x^2-4x+7 = x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2+3 = (x-2)^2+3.$$

Επομένως

$$I_3 = \int\frac{1}{(x-2)^2+3}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\int\frac{1}{\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = \dfrac{x-2}{\sqrt{3}}$ και έχουμε $dx = \sqrt{3}du$. Άρα

$$I_3 = \frac{1}{3}\cdot\int\frac{1}{u^2+1}\cdot\sqrt{3}\,du = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\arctan(u)+c = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right)+c.$$

Άσκηση 7. Βρείτε τα εξής αόριστα ολοκληρώματα:

$$I = \int\frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx \qquad J = \int\frac{x+5}{4x^2+4x+10}\,dx.$$

Λύση.
Στο πρώτο ολοκλήρωμα παρατηρούμε ότι το τριώνυμο x^2+2x+2 έχει αρνητική διακρίνουσα και ότι

$$x^2+2x+2 = x^2+2x+1+1 = (x+1)^2+1.$$

Επομένως

$$I = \int\frac{x+1}{(x+1)^2+1}\,dx.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = (x+1)^2$ οπότε $du = 2(x+1)dx$. Επομένως

$$I = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{u+1}\,du = \frac{1}{2}\cdot\ln|u+1|+c = \frac{1}{2}\cdot\ln((x+1)^2+1)+c = \frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+2x+2)+c.$$

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα βλέπουμε πάλι ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου $4x^2 + 4x + 10$ είναι αρνητική και πως

$$4x^2 + 4x + 10 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x + 1 + 9 = (2x+1)^2 + 9.$$

Άρα

$$J = \int \frac{x+5}{(2x+1)^2+9}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x+10}{(2x+1)^2+9}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x+1+9}{(2x+1)^2+9}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x+1}{(2x+1)^2+9}\, dx \ + \ \frac{1}{2} \cdot \int \frac{9}{(2x+1)^2+9}\, dx.$$

Συμβολίζουμε τα πιο πάνω ολοκληρώματα με J_1 και J_2 αντίστοιχα και έχουμε

$$J = \frac{1}{2} \cdot (J_1 + J_2) \tag{1}$$

Υπολογίζουμε το κάθε ένα ολοκλήρωμα ξεχωριστά. Στο J_1 εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = (2x+1)^2$, οπότε $du = 2(2x+1) \cdot 2dx = 4(2x+1)dx$. Επομένως

$$J_1 = \int \frac{2x+1}{(2x+1)^2+9}\, dx = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{u+9}\, du = \frac{1}{4} \cdot \ln|u+9| + c_1 = \frac{1}{4} \cdot \ln((2x+1)^2+9) + c_1.$$

Υπολογίζουμε το J_2,

$$J_2 = \int \frac{9}{(2x+1)^2+9} = \int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{3}\right)^2 + 1}\, dx.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = \dfrac{2x+1}{3}$ και έχουμε $du = \dfrac{2}{3}dx$ ή αλλιώς $dx = \dfrac{3}{2}du$. Άρα

$$J_2 = \int \frac{1}{u^2+1} \cdot \frac{3}{2}\, du = \frac{3}{2} \cdot \arctan(u) + c_2 = \frac{3}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{3}\right) + c_2.$$

Από την (1) προκύπτει

$$J = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \ln((2x+1)^2+9) + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{3}\right) + c$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \ln(4x^2+4x+10) + \frac{3}{4} \cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{3}\right) + c.$$

Άσκηση 8. Βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{1}{(x+3)(x^2+x+1)}\, dx.$$

Λύση.

Αρχικά αναλύουμε το κλάσμα,

$$\frac{1}{(x+3)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Μετά από πράξεις βρίσκουμε $C = 2/7$, $B = -1/7$ και $A = 1/7$. Άρα

$$\frac{1}{(x+3)(x^2+x+1)} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{x+3} - \frac{1}{7} \cdot \frac{x-2}{x^2+x+1}.$$

Συμβολίζουμε με I το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα. Τότε

$$I = \frac{1}{7} \cdot \int \frac{1}{x+3}\, dx - \frac{1}{7} \cdot \int \frac{x-2}{x^2+x+1}\, dx.$$

Συμβολίζουμε τα τελευταία δύο ολοκληρώματα με I_1 και I_2 αντίστοιχα, έτσι που

$$I = \frac{1}{7} \cdot I_1 - \frac{1}{7} \cdot I_2.$$

Έχουμε

$$I_1 = \int \frac{1}{x+3}\, dx = \ln|x+3| + c_1.$$

Σχετικά με το I_2, παρατηρούμε ότι το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ δεν έχει πραγματικές ρίζες και

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = (x + 1/2)^2 + 3/4.$$

Άρα

$$I_2 = \int \frac{x-2}{(x+1/2)^2 + 3/4}\, dx = \int \frac{x+1/2}{(x+1/2)^2+3/4}\, dx - \frac{5}{2} \cdot \int \frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}\, dx.$$

Συμβολίζουμε τα τελευταία δύο ολοκληρώματα με I_3 και I_4 αντίστοιχα, έτσι που $I_2 = I_3 - (5/2) \cdot I_4$. Για τον υπολογισμό του I_3 εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = (x + 1/2)^2$ οπότε $du = 2(x + 1/2)dx$. Άρα

$$I_3 = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{u+3/4}\, du = \frac{1}{2} \cdot \ln|u + 3/4| + c_2 = \frac{1}{2} \cdot \ln((x+1/2)^2 + 3/4) + c_2 = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + x + 1) + c_2.$$

Για το I_4 έχουμε

$$I_4 = \int \frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}\, dx = \frac{4}{3} \cdot \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (x+1/2)\right)^2 + 1}\, dx.$$

Με αντικατάσταση $u = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (x + 1/2)$ προκύπτει $du = \frac{2}{\sqrt{3}}\, dx$ και άρα

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \int \frac{1}{u^2+1}\, du = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan(u) + c_3 \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (x+1/2)\right) + c_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c_3. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε

$$I_2 = I_3 - \frac{5}{2} \cdot I_4 = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + x + 1) - \frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c_4$$

και

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{7} \cdot I_1 - \frac{1}{7} \cdot I_2 \\ &= \frac{1}{7} \cdot \ln|x+3| - \frac{1}{14} \cdot \ln(x^2 + x + 1) + \frac{5\sqrt{3}}{21} \cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c. \end{aligned}$$

Άσκηση 9. Θεωρούμε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$I = \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos x}\, dx \qquad \text{και} \qquad J = \int \frac{1}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x}\, dx.$$

(i) Να αναγάγετε τα I και J σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων με κατάλληλη αντικατάσταση.

(ii) Υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα I και J.

Λύση.

(i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $R(u,v)=\dfrac{1}{u^2\cdot v}$, $u,v\neq 0$, έτσι που

$$I=\int R(\sin x,\cos x)\,dx.$$

Παρατηρούμε ότι

$$R(u,-v)=\frac{1}{u^2\cdot(-v)}=-R(u,v)$$

δηλαδή η R είναι περιττή ως προς v. (Προσοχή μην μπερδευτείτε με το ότι η συνάρτηση συνημίτονο είναι άρτια - αυτό δεν έχει σχέση σε αυτό το σημείο.)

Σύμφωνα με τα γνωστά το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης εφαρμόζοντας την αντικατάσταση $t=\sin x$.

Έχουμε $dt=\cos x dx$ και

$$I=\int\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos x}\,dx=\int\frac{\cos x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}\,dx=\int\frac{1}{t^2\cdot(1-t^2)}\,dt,$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι $\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-t^2$. Επομένως έχουμε εκφράσει το I ως αόριστο ολοκλήρωμα της ρητής συνάρτησης $f(t)=\dfrac{1}{t^2\cdot(1-t^2)}$, $t\neq 0$.

Στο ολοκλήρωμα J παίρνουμε $Q(u,v)=\dfrac{1}{u^4\cdot v^2}$, $u,v\neq 0$, έτσι που

$$J=\int Q(\sin x,\cos x)\,dx.$$

Παρατηρούμε ότι η Q είναι άρτια ως προς το ζεύγος (u,v), δηλαδή

$$Q(-u,-v)=\frac{1}{(-u)^4\cdot(-v)^2}=\frac{1}{u^4\cdot v^2}=Q(u,v).$$

Σύμφωνα με τα γνωστά το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int Q(\sin x,\cos x)\,dx$ ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης εφαρμόζοντας την αντικατάσταση $t=\tan x$.

Έχουμε $dt=\dfrac{1}{\cos^2 x}dx$ και

$$J=\int\frac{1}{\sin^4 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx,$$

άρα θέλουμε να εκφράσουμε την ποσότητα $1/\sin^4 x$ συναρτήσει του t. Αφού $t=\tan x$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\sin^2 x=t^2\cos^2 x\implies\sin^2 x=t^2(1-\sin^2 x)\\
\implies&\sin^2 x=t^2-t^2\sin^2 x\implies\sin^2 x(1+t^2)=t^2\\
\implies&\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}\implies\sin^4 x=\frac{t^4}{(1+t^2)^2}\\
\implies&\frac{1}{\sin^4 x}=\frac{(1+t^2)^2}{t^4}.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$J=\int\frac{(1+t^2)^2}{t^4}\,dt.$$

(ii) Υπολογίζουμε το $I=\displaystyle\int\frac{1}{t^2(1-t^2)}\,dt$ ως συνάρτηση του t και μετά αντικαθιστούμε $t=\sin x$. Παρατηρούμε ότι το κλάσμα είναι έκφραση του t^2, δηλαδή αν θέσουμε $s=t^2$ τότε το κλάσμα μετατρέπεται σε $\dfrac{1}{s(1-s)}$, το οποίο αναλύεται εύκολα ως εξής:

$$\frac{1}{s(1-s)}=\frac{1}{s}+\frac{1}{1-s}=\frac{1}{t^2}+\frac{1}{1-t^2}\,.$$

Άρα
$$I=\int \frac{1}{t^2(1-t^2)}\,dt=\int \frac{1}{t^2}\,dt+\int \frac{1}{1-t^2}\,dt=-\frac{1}{t}+\int \frac{1}{1-t^2}\,dt.$$
Για να βρούμε το τελευταίο ολοκλήρωμα κάνουμε ακόμα μία ανάλυση κλάσματος,
$$\frac{1}{1-t^2}=\frac{1}{(1-t)(1+t)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-t}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t}\,.$$
Καταλήγουμε
$$I=-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{1-t}\,dt+\frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{1+t}\,dt=-\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\cdot\ln|1-t|+\frac{1}{2}\cdot\ln|1+t|+c.$$

(Το προτελευταίο ολοκλήρωμα προκύπτει με αντικατάσταση $u=-t$.) Θέτοντας πίσω $t=\sin x$ έχουμε
$$I=\frac{1}{2}\cdot\left(\ln(1+\sin x)-\ln(1-\sin x)-\frac{2}{\sin x}\right)+c.$$
Τέλος υπολογίζουμε το J. Εδώ δεν χρειάζεται να αναλύσουμε το κλάσμα γιατί ο παρονομαστής αποτελείται μόνο από έναν όρο, το t^4.
$$J=\int \frac{(1+t^2)^2}{t^4}\,dt=\int \frac{1+2t^2+t^4}{t^4}\,dt=\int \frac{1}{t^4}\,dt+\int \frac{2}{t^2}\,dt+\int 1\,dt=-\frac{1}{3t^3}-\frac{2}{t}+t+c.$$
Αφού $t=\tan x$ προκύπτει
$$J=\tan x-\frac{2}{\tan x}-\frac{1}{3\tan^3 x}+c.$$