Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

9ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Άσκηση 1 (Ερωτήσεις Κατανόησης)**.** Απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις με αιτιολόγηση.

(i) Αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι δυναμοσειρά και το I είναι ανοικτό διάστημα τότε η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο I. Σωστό ή Λάθος;

(ii) Οι δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ και $\sum_{n=1339}^{\infty} a_n \cdot x^n$ συγκλίνουν ακριβώς για τα ίδια $x \in \mathbb{R}$. Σωστό ή Λάθος;

(iii) Αν δύο δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης θα συγκλίνουν απαραίτητα για τα ίδια $x \in \mathbb{R}$;

(iv) Αν μια δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x σε ένα διάστημα I με άκρα τους αριθμούς 3 και 8, αλλά δεν συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, ποιο είναι το κέντρο της δυναμοσειράς και ποια η ακτίνα σύγκλισής της;

Λύση.

(i) Είναι **Σωστό** γιατί από το Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών η παράγωγος μιας δυναμοσειράς σε ένα ανοικτό διάστημα I είναι επίσης δυναμοσειρά στο I και επομένως παραγωγίζεται ξανά.

(ii) Είναι **Σωστό** γιατί τα μερικά αθροίσματα των δύο δυναμοσειρών διαφέρουν κατά ένα πεπερασμένο πλήθος όρων, συγκεκριμένα διαφέρουν κατά $\sum_{n=0}^{1338} a_n \cdot x^n$. Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ συγκλίνει στον αριθμό s_x τότε η σειρά $\sum_{n=1339}^{\infty} a_n \cdot x^n$ συγκλίνει στον αριθμό $s_x - \sum_{n=0}^{1338} a_n \cdot x^n$. Ισχύει και το αντίστροφο: για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν η σειρά $\sum_{n=1339}^{\infty} a_n \cdot x^n$ συγκλίνει στον αριθμό t_x τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ συγκλίνει στον αριθμό $t_x + \sum_{n=0}^{1338} a_n \cdot x^n$.

Επομένως οι δύο δυναμοσειρές συγκλίνουν για τα ίδια $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Όχι απαραίτητα. Ας πάρουμε τις δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$. Η πρώτη συγκλίνει ακριβώς για κάθε $x \in (-1, 1)$ ενώ η δεύτερη ακριβώς για κάθε $x \in [-1, 1)$. Άρα οι δύο δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης $r = 1$ αλλά για $x = -1$ η μία συγκλίνει ενώ η άλλη όχι.

(iv) Το κέντρο της δυναμοσειράς είναι ο αριθμός $\frac{3+8}{2} = \frac{11}{2}$ και η ακτίνα σύγκλισης ο αριθμός $r = \frac{8-3}{2} = \frac{5}{2}$.

Εξήγηση: μια δυναμοσειρά είτε (α) θα συγκλίνει ακριβώς για ένα x (το κέντρο της δυναμοσειράς), είτε (β) θα συγκλίνει για τα x σε ένα διάστημα της μορφής $(c-r, c+r)$ και θα αποκλίνει για τα $x \notin [c-r, c+r]$ ενώ για τα $x = c-r, c+r$ μπορεί να συγκλίνει ή να αποκλίνει, είτε (γ) θα συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

Από τα δεδομένα μας δεν βρισκόμαστε στις περιπτώσεις (α) και (γ). Επομένως είμαστε στη (β). Τότε το κέντρο της δυναμοσειράς είναι το μέσο του διαστήματος ενώ η ακτίνα σύγκλισης το μισό του μήκους του. Δηλαδή $c - r = 3$ και $c + r = 8$.

Άσκηση 2 (Αναγνώριση δυναμοσειράς)**.** Βρείτε το κέντρο c και τους συντελεστές a_n, $n \in \mathbb{N}$ στις ακόλουθες δυναμοσειρές.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x-1)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (7x-1)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (5x+3)^n.$$

Λύση.

Στην πρώτη δυναμοσειρά έχουμε $a_n = 3^n$, $n \in \mathbb{N}$ και $c = 0$.

Στη δεύτερη: $a_n = \dfrac{1}{n!}$ και $c = 1$.

Σχετικά με την τρίτη δυναμοσειρά πρέπει να φέρουμε τους όρους μέσα στο άθροισμα στη μορφή $a_n \cdot (x-c)^n$. Υπολογίζουμε

$$2^{-n} \cdot (7x-1)^n = 2^{-n} \cdot 7^n \cdot \left(x - \frac{1}{7}\right)^n = \frac{7^n}{2^n} \cdot \left(x - \frac{1}{7}\right)^n.$$

Άρα $a_n = \dfrac{7^n}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$ και $c = \dfrac{1}{7}$.

Τέλος στην τέταρτη δυναμοσειρά υπολογίζουμε

$$\frac{1}{n+1} \cdot (5x+3)^n = \frac{1}{n+1} \cdot 5^n \cdot \left(x + \frac{3}{5}\right)^n = \frac{5^n}{n+1} \cdot (x - (-3/5))^n.$$

Άρα $a_n = \dfrac{5^n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ και $c = -\dfrac{3}{5}$.

Άσκηση 3 (Εύρεση διαστήματος σύγκλισης)**.**

(i) Για κάθε δυναμοσειρά της Άσκησης 2 βρείτε το σύνολων όλων των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά συγκλίνει.

(ii) Επαναλάβετε το ίδιο για τις ακόλουθες δυναμοσειρές.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}}$$

Λύση.

(i) Εφαρμόζουμε το Κριτήριο του Λόγου. Σχετικά με την πρώτη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^n$ θεωρούμε $x \neq 0$. Τότε έχουμε

$$\left| \frac{3^{n+1} \cdot x^{n+1}}{3^n \cdot x^n} \right| = 3 \cdot |x|$$

Αν $3 \cdot |x| < 1$, ισοδύναμα $|x| < 1/3$ ή αλλιώς $x \in (-1/3, 1/3)$ τότε η σειρά συγκλίνει. Αν $3 \cdot |x| > 1$, ισοδύναμα $x \notin [-1/3, 1/3]$ η σειρά αποκλίνει. Αν $x = 1/3$ τότε $3^n \cdot x^n = 1 \not\to 0$ άρα η σειρά αποκλίνει. Αν $x = -1/3$ τότε $3^n \cdot x^n = (-1)^n \not\to 0$ άρα η σειρά αποκλίνει επίσης.

Επομένως η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^n$ συγκλίνει ακριβώς για $x \in (-1/3, 1/3)$.

(Πιο πάνω υποθέσαμε ότι $x \neq 0 =$ το κέντρο της δυναμοσειράς αλλά όπως έχουμε πει η δυναμοσειρά συγκλίνει πάντα για $x =$ κέντρο.)

Περνάμε στη δεύτερη δυναμοσειρά: $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} \cdot (x-1)^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ έχουμε

$$\left| \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(x-1)^n} \right| = \frac{1}{n+1} \cdot |x-1| \longrightarrow 0 < 1.$$

Επομένως η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Προχωράμε στην τρίτη δυναμοσειρά: $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (7x-1)^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $7x - 1 \neq 0$, ισοδύναμα $x \neq 1/7$ (που είναι το κέντρο της δυναμοσειράς) έχουμε

$$\left| \frac{2^{-(n+1)} \cdot (7x-1)^{n+1}}{2^{-n} \cdot (7x-1)^n} \right| = \frac{1}{2} \cdot |7x-1|.$$

Προφανώς

$$\frac{1}{2} \cdot |7x-1| < 1 \iff |7x-1| < 2 \iff 7x \in (1-2, 1+2) \iff 7x \in (-1, 3) \iff x \in (-1/7, 3/7).$$

Άρα για $x \in (1/7, 3/7)$ η σειρά συγκλίνει ενώ για τα x με $\frac{1}{2} \cdot |7x-1| > 1$, ισοδύναμα $x \notin [-1/7, 3/7]$ η σειρά αποκλίνει. Εξετάζουμε τις άλλες δύο περιπτώσεις.

Για $x = 3/7$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (7x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (3-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$$

και άρα η σειρά αποκλίνει.

Για $x = -1/7$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (7x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

που επίσης αποκλίνει. Ένας τρόπος για να το δούμε αυτό είναι να παρατηρήσουμε ότι $(-1)^n \not\to 0$.

Επομένως η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot x^n$ συγκλίνει ακριβώς για $x \in (-1/7, 3/7)$.

Σχόλιο: Για να εφαρμόσουμε το Κριτήριο του Λόγου δεν χρειάζεται να φέρουμε τη δυναμοσειρά στη μορφή $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$. Δηλαδή δεν απαιτείται να έχουμε λύσει πρώτα την Άσκηση 2. Βοηθάει όμως να αναγνωρίσουμε το κέντρο της δυναμοσειράς.

Τέλος θεωρούμε την τέταρτη δυναμοσειρά: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (5x+3)^n$. Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq -3/5$ (το κέντρο της δυναμοσειράς). Τότε

$$\left| \frac{(5x+3)^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{(5x+3)^n} \right| = \frac{n+1}{n+2} \cdot |5x+3| \longrightarrow 1 \cdot |5x+3| = |5x+3|.$$

Υπολογίζουμε

$$|5x+3| < 1 \iff 5x \in (-3-1, -3+1) \iff 5x \in (-4, -2) \iff x \in (-4/5, -2/5).$$

Οπότε για $x \in (-4/5, -2/5)$ η σειρά συγκλίνει ενώ για $x \notin [-4/5, -2/5]$ αποκλίνει. Για $x = -2/5$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x+3)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

που αποκλίνει (αρμονική σειρά). Ενώ για $x = -4/5$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x+3)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

που συγκλίνει από το Κριτήριο Leibniz. Επομένως η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (5x+3)^n$ συγκλίνει ακριβώς για $x \in [-4/5, -2/5)$.

(ii) Στην πρώτη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n$ έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\left| \frac{\sqrt{n+1} \cdot x^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n} \cdot x^n} \right| = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{1}{2} \cdot |x| \longrightarrow \sqrt{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot |x| = \frac{1}{2} \cdot |x|.$$

Έχουμε $1/2 \cdot |x| < 1 \iff |x| < 2 \iff x \in (-2, 2)$. Επομένως η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in (-2, 2)$ και αποκλίνει για κάθε $x \notin [-2, 2]$. Για $x = 2$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}$$

και η σειρά αποκλίνει γιατί $\sqrt{n} \to \infty$. Για $x = -2$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \sqrt{n}$$

που πάλι αποκλίνει γιατί $(-1)^n \cdot \sqrt{n} \not\to 0$. (Αν συνέκλινε στο 0 τότε και η απόλυτη τιμή της ακολουθίας θα συνέκλινε στο 0 που είναι άτοπο.)

Επομένως η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n$ συγκλίνει ακριβώς για $x \in (-2, 2)$.

Περνάμε στην επόμενη δυναμοσειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ έχουμε

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot x^{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n} \right| = |x| \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow |x| \cdot \frac{e}{e} = |x|$$

Οπότε για $|x| < 1$ η σειρά συγκλίνει ενώ για $|x| > 1$ αποκλίνει. Για $|x| = 1$ έχουμε

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot |x|^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e \neq 0.$$

Ειδικότερα η ακολουθία που βρίσκεται μέσα στη σειρά δεν συγκλίνει στο 0 και επομένως η σειρά αποκλίνει. Καταλήγουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n$ συγκλίνει ακριβώς για $x \in (-1, 1)$.

Στην επόμενη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot x^n$ έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$,

$$\left| \frac{(n+1)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{n^n \cdot x^n} \right| = |x| \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1) \geq |x| \cdot (n+1) \longrightarrow \infty.$$

Επομένως η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο για $x = 0$.

Τέλος θεωρούμε τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}}$. Έστω $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, τότε

$$\left| \frac{x^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^2+5}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+5}}{x^n} \right| = |x| \cdot \sqrt{\frac{n^2+5}{(n+1)^2+5}} = |x| \cdot \sqrt{\frac{n^2+5}{n^2+2n+6}} \longrightarrow |x| \cdot \sqrt{1} = |x|.$$

Επομένως αν $|x| < 1$ η σειρά συγκλίνει και αν $|x| > 1$ η σειρά αποκλίνει.

Για $x = 1$ έχουμε

$$\frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+5}}.$$

Εφαρμόζουμε το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης με $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+5}}$ και $b_n = \dfrac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+5}} = \sqrt{\frac{(n+1)^2}{n^2+5}} = \sqrt{\frac{n^2+2n+1}{n^2+5}} \longrightarrow 1 > 0.$$

Επομένως είμαστε στην πρώτη περίπτωση του κριτηρίου, που λέει ότι είτε και οι δύο σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν είτε και οι δύο αποκλίνουν. Η $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ όμως αποκλίνει (αρμονική σειρά) επομένως και η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Για $x = -1$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+5}} .$$

Η ακολουθία $(\sqrt{n^2+5})_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι γνησίως αύξουσα και επομένως η ακολουθία $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+5}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως από το Κριτήριο του Leibniz η πιο πάνω σειρά συγκλίνει. (Δεν κάνει διαφορά που τα αθροίσματα ξεκινάνε από το 0.) Καταλήγουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n^2+5}}$ συγκλίνει ακριβώς για $x \in [-1, 1)$.

Άσκηση 4 (Παράγωγος δυναμοσειράς τάξης m). **Δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $m \geq 1$ κάθε δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ που συγκλίνει για κάθε x σε ένα ανοικτό διάστημα I έχει παράγωγο m-τάξης στο I, η οποία δίνεται από του τύπους**

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (m+k)\cdot(m-1+k)\cdot\dots\cdot(1+k)\cdot a_{m+k}\cdot(x-c)^k \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot\ldots(n-m+1)\cdot a_n\cdot(x-c)^{n-m} \qquad x \in I. \end{aligned}$$

Λύση.

Αρχικά παρατηρούμε ότι η ισότητα των δύο δυναμοσειρών

$$\sum_{k=0}^{\infty} (m+k)\cdot(m-1+k)\cdot\dots\cdot(1+k)\cdot a_{m+k}\cdot(x-c)^k = \sum_{n=m}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot\ldots(n-m+1)\cdot a_n\cdot(x-c)^{n-m}$$

προκύπτει εύκολα αντικαθιστώντας $k = n - m - 1$, το κάτω όριο από $k = 0$ γίνεται $n = m + 1$. Επομένως δείχνουμε μόνο την ισότητα με την πρώτη δυναμοσειρά.

Αυτό γίνεται με επαγωγή στο m. Για $m = 1$ το ζητούμενο είναι σαφές από το Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n\cdot(x-c)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(1+k)\cdot a_{1+k}\cdot(x-c)^k.$$

Θεωρούμε ότι ισχύει το ζητούμενο για κάποιο $m \geq 1$ και το δείχνουμε με το $m+1$.

Έστω $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, $x \in I$, όπου I ανοικτό διάστημα. Έχουμε

$$\begin{aligned} f^{(m+1)}(x) &= \left(f^{(m)}\right)'(x) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (m+k)\cdot(m-1+k)\cdot\dots\cdot(1+k)\cdot a_{m+k}\cdot(x-c)^k\right)' \qquad \text{(Επαγωγική Υπόθεση)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (m+k) \cdot (m-1+k) \cdot \dots \cdot (1+k) \cdot k \cdot a_{m+k} \cdot (x-c)^{k-1}$$

(Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (m+k+1) \cdot (m-1+k+1) \cdot \dots \cdot (1+k+1) \cdot (k+1) \cdot a_{m+k+1} \cdot (x-c)^{k}$$

(αντικαθιστούμε το k με το $k+1$, το κάτω όριο ξεκινά από το 0)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} ((m+1)+k) \cdot (m+k) \cdot \dots \cdot (2+k) \cdot (1+k) \cdot a_{(m+1)+k} \cdot (x-c)^{k}.$$

Άσκηση 5. Δείξτε με τη βοήθεια του Θεωρήματος Ολοκλήρωσης Δυναμοσειρών ότι

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n, \quad |x| < 1.$$

Λύση.
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x| < 1$ έχουμε

$$\ln(1+x)' = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n.$$

Από το Θεώρημα Ολοκλήρωσης Δυναμοσειρών προκύπτει

$$\ln(1+x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n \cdot x^n dx \right) + c = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) + c$$

για κάποιο $c \in \mathbb{R}$. Για $x = 0$ έχουμε

$$0 = \ln(1+0) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{0^{n+1}}{n+1} \right) + c = 0 + c = c.$$

Άρα για κάθε $|x| < 1$, ισχύει

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

όπου στην τελευταία ισότητα έχουμε αντικαταστήσει το n με το $n-1$.

Άσκηση 6. Σε αυτή την άσκηση **δεν** μπορείτε να πάρετε δεδομένο τον τύπο της δυναμοσειράς του ημιτόνου γιατί αυτό είναι το ζητούμενο.

(i) Βρείτε όλα τα πολυώνυμα Taylor στο 0 της συνάρτησης του ημιτόνου με τη βοήθεια του ακόλουθου τύπου:

$$\sin^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^j, & k = 2j+1 \\ 0, & k = 2j. \end{cases}$$

(ii) Αποδείξτε τον τύπο της δυναμοσειράς για τη συνάρτηση του ημιτόνου:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μπορείτε να πάρετε δεδομένο ότι η πιο πάνω δυναμοσειρά έχει άπειρη ακτίνα σύγκλισης.

Λύση.
(i) Έστω P_m τα ζητούμενα πολυώνυμα, $m \in \mathbb{N}$. Αρχικά βρίσκουμε τα P_{2n+1} και μετά τα P_{2n}, όπου $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} P_{2n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{\sin^{(2j+1)}(0)}{(2j+1)!} \cdot x^{2j+1} \quad \text{(γιατί για } k = 2j \text{ η παράγωγος είναι } 0\text{)} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \cdot x^{2j+1} \quad \text{(από τον τύπο).} \end{aligned}$$

Προφανώς το $P_{2n+2}(x)$ διαφέρει από το $P_{2n+1}(x)$ κατά τον παράγοντα $\dfrac{\sin^{(2n+2)}(0)}{k!} \cdot x^{2n+2}$. Αφού όμως $\sin^{(2n+2)}(0) = 0$ προκύπτει ότι $P_{2n+2}(x) = P_{2n+1}(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Απομένει να βρούμε το P_0. Αυτό όμως είναι άμεσο: $P_0(x) = \dfrac{\sin^{(0)}(0)}{0!} \cdot x^0 = \sin(0) \cdot x^0 = 0$.

(ii) Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$. Από το Θεώρημα Taylor υπάρχει ξ ανάμεσα στο 0 και στο x με

$$\sin x = P_{2n+1}(x) + \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2}.$$

Έχουμε

$$\left| \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2} \right| \leq \frac{1}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2} \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Το τελευταίο όριο το βρήκαμε με το Κριτήριο του Λόγου:

$$\frac{x^{2(n+1)+2}}{(2(n+1)+2)!} \cdot \frac{(2n+2)!}{x^{2n+2}} = \frac{x^{2n+4}}{(2n+4)!} \cdot \frac{(2n+2)!}{x^{2n+2}} = \frac{x^2}{(2n+3)(2n+4)} \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0 < 1.$$

Παίρνοντας όριο $n \to \infty$ στην πιο πάνω ισότητα με το $\sin x$ έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sin x &= \lim_{n\to\infty} P_{2n+1}(x) + \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2} \\ \implies \sin x &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \cdot x^{2j+1} \right) + 0 \\ \implies \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2+1)!} \cdot x^{2n+1} . \end{aligned}$$

Άσκηση 7. Βρείτε όλα τα πολυώνυμα Taylor στο 0 των συναρτήσεων $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x \cdot e^{-x}, \qquad g(x) = e^{x^2} + \cos x \quad x \in \mathbb{R}.$$

Λύση.
Σε αντίθεση με την Άσκηση 6 όπου υπολογίσαμε τα πολυώνυμα Taylor στο 0 με βάση τις παραγώγους στο 0, τώρα θα αναπτύξουμε τις συναρτήσεις σε δυναμοσειρές με κέντρο το 0 με βάση τα γνωστά αναπτύγματα. Όπως έχουμε πει **τα πολυώνυμα Taylor στο 0 είναι τα μερικά αθροίσματα των δυναμοσειρών**.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1}. \end{aligned}$$

Το πολυώνυμο Taylor P_n στο 0 είναι το μερικό άθροισμα μέχρι τη n-οστή δύναμη του x. Άρα πρέπει να πάρουμε το μερικό άθροισμα μέχρι το $n-1$. Επομένως

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot x^{k+1} = x - \frac{x^2}{1!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n.$$

Για την g, χρησιμοποιούμε τα γνωστά αναπτύγματα των e^x και $\cos x$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \right) \cdot x^{2n} \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα ότι το άθροισμα των συγκλινουσών σειρών δύο ακολουθιών είναι η σειρά του αθροίσματος των δύο ακολουθιών.

Αν συμβολίσουμε με Q_m τα πολυώνυμα Taylor στο 0 της συνάρτησης g, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$Q_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} + \frac{(-1)^k}{(2k)!} \right) \cdot x^{2k}.$$

Για το $Q_{2n+1}(x)$ παρατηρούμε ότι στο ανάπτυγμα της g δεν υπάρχουν δυνάμεις του x με περιττό εκθέτη ή αλλιώς ο συντελεστής των δυνάμεων του x με περιττό εκθέτη είναι 0. Επομένως $Q_{2n+1}(x) = Q_{2n}(x)$, για κάθε n, x.

Άσκηση 8.

(i) Βρείτε έναν φυσικό αριθμό n για τον οποίο

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 10^{-4}.$$

(ii) Βρείτε (με απόδειξη) τον ελάχιστο φυσικό αριθμό n με την πιο πάνω ιδιότητα.

Λύση.

(i) Γνωρίζουμε ότι $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως το πολυώνυμο Taylor P_n της e^x στο 0 είναι το

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Taylor για $x = 1$. Τότε υπάρχει $\xi \in (0,1)$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} & e^1 = P_n(1) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1} \\ \iff & e = P_n(1) + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

όπου $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Προφανώς

$$P_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Συνεπώς

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}. \tag{1}$$

Επειδή η e^x είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση και $\xi < 1$ έχουμε

$$\frac{e^{\xi}}{(n+1)!} < \frac{e^1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Ειδικότερα από την (1) έχουμε

(2) $$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Επομένως αρκεί να έχουμε $\dfrac{3}{(n+1)!} < 10^{-4}$. Ισοδύναμα $(n+1)! > 30000$. Υπολογίζουμε

$$5! = 120, \quad 6! = 720, \quad 7! = 720 \cdot 7 = 5040, \quad 8! = 5040 \cdot 8 = 40320 > 30000.$$

Επομένως αρκεί να έχουμε $n+1 = 8$ δηλαδή $n = 7$.

Προσοχή. Θέτοντας $n = 6$ στην (2) βλέπουμε ότι $e - \sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k!} < \frac{3}{7!} = \frac{3}{5040}$. Η τελευταία ανισότητα δεν μπορεί να αποκλείσει το ενδεχόμενο η προσέγγιση του $\sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k!}$ στο e να είναι πολύ μικρότερη του $3 \cdot 5040^{-1}$, ίσως και μικρότερη του 10^{-4}. Επομένως δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ακόμα ότι το $n = 7$ είναι ο ελάχιστος φυσικός n με $e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 10^{-4}$. Αυτό ουσιαστικά είναι το ζητούμενο του επόμενου ερωτήματος.

(ii) Από την (1) και το γεγονός ότι η e^x είναι αύξουσα συνάρτηση έχουμε

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} > \frac{e^0}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}\ .$$

Για $n = 6$ έχουμε

$$e - \sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k!} > \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040}\ .$$

Αλλά $5040 < 10000 = 10^4$, άρα $e - \sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k!} > \frac{1}{5040} > 10^{-4}$.

Επομένως ο $n = 7$ είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός με $e - \sum_{k=0}^{7} \frac{1}{k!} < 10^{-4}$.

Άσκηση 9. Δείξτε με χρήση του Θεωρήματος Taylor ότι

$$\left| \cos(2x) - \left(1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!}\right) \right| \leq \frac{64x^6}{6!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση.

Αρχικά δείχνουμε μια ανισότητα με βάση το $\cos x$ και το πολυώνυμο Taylor P_5 της $\cos x$ στο 0 - έπειτα αντικαθιστούμε το x με το $2x$. Το 5 υπαγορεύεται από την εκφώνηση όπου το σφάλμα στην προσέγγιση είναι $64x^6/6!$, με άλλα λόγια **το υπόλοιπο Taylor πρέπει να έχει βαθμό** 6. Αυτό συμβαίνει όταν το πολυώνυμο Taylor είναι το P_5.

Έχουμε $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για να βρούμε το πολυώνυμο Taylor P_5 στο 0 παίρνουμε τις δυνάμεις όπου ο εκθέτης φτάνει το πολύ μέχρι 5, δηλαδή

$$P_5(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot (2x)^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\ .$$

(Δεν πειράζει που ο συντελεστής του x^5 είναι 0.)

Θεωρούμε $x \in \mathbb{R}$. Από το Θεώρημα Taylor υπάρχει ξ ανάμεσα στο 0 και στο x με

$$R_5(x) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} \cdot x^6 = \frac{\cos^{(6)}(\xi)}{6!} \cdot x^6$$

όπου $R_5(x) = \cos(x) - P_5(x)$. Έχουμε $|\cos^{(6)}(\xi)| \leq 1$ (οι παράγωγοι του συνημιτόνου κάθε τάξης είναι της μορφής $\pm\sin$ ή $\pm\cos$), άρα

$$|\cos x - P_5(x)| = |R_5(x)| \leq \frac{1}{6!} \cdot |x^6|$$

$$\implies \left|\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)\right| \leq \frac{x^6}{6!}\,.$$

Το πιο πάνω ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως μπορούμε να αντικαταστήσουμε το x με το $2x$ και παίρνουμε

$$\left|\cos(2x) - \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!}\right)\right| \leq \frac{(2x)^6}{6!}\,.$$

Δηλαδή

$$\left|\cos(2x) - \left(1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!}\right)\right| \leq \frac{64x^6}{6!}\,.$$

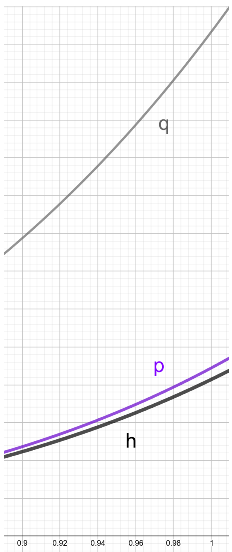
Σχόλιο: Επειδή ο συντελεστής του x^5 στο $P_5(x)$ είναι 0 έχουμε ότι $P_5(x) = P_4(x)$. Άρα το $|\cos x - P_5(x)|$ παραμένει το ίδιο με το $|\cos x - P_4(x)| = |R_4(x)|$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Taylor παίρνοντας το υπόλοιπο R_4 αντί του R_5. Όπως με πριν καταλήγουμε στο $|R_4(x)| \leq \frac{|x|^5}{5!}$. Τέλος αντικαθιστώντας το x με το $2x$ παίρνουμε

$$\left|\cos(2x) - \left(1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!}\right)\right| = |\cos(2x) - P_4(2x)| = |R_4(2x)| \leq \frac{|2x|^5}{5!} = \frac{32|x|^5}{5!}.$$

Με άλλα λόγια η προσέγγιση με σφάλμα το πολύ $\frac{32|x|^5}{5!}$ είναι επίσης σωστή και προκύπτει από το Θεώρημα Taylor. Όμως η προσέγγιση της εκφώνησης, δηλαδή με σφάλμα το πολύ $\frac{64|x|^6}{6!}$, είναι ακριβέστερη όταν $0 < |x| < 3$. Για να δούμε το τελευταίο παρατηρούμε ότι

$$\frac{64|x|^6}{6!} < \frac{32|x|^5}{5!} \iff \frac{2|x|^6}{6} < |x|^5 \iff |x| < 3, \qquad \text{όπου } x \neq 0.$$

Πιο κάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των $h(x) = \left|\cos(2x) - \left(1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!}\right)\right|$, $p(x) = \frac{64x^6}{6!}$ και $q(x) = \frac{32|x|^5}{5!}$ γύρω από το $x = 0,96$ για να δούμε την τάξη μεγέθους στη διαφορά των σφαλμάτων:



Όπως βλέπουμε στην περιοχή του $x = 0,96$ η συνάρτηση p είναι αρκετά καλύτερη προσέγγιση της h σε σχέση με την q.