Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

9ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Άσκηση 1 (Ερωτήσεις Κατανόησης). Απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις με αιτιολόγηση.

(i) Αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι δυναμοσειρά και το I είναι ανοικτό διάστημα τότε η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο I. Σωστό ή Λάθος;

(ii) Οι δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ και $\sum_{n=1339}^{\infty} a_n \cdot x^n$ συγκλίνουν ακριβώς για τα ίδια $x \in \mathbb{R}$. Σωστό ή Λάθος;

(iii) Αν δύο δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης θα συγκλίνουν απαραίτητα για τα ίδια $x \in \mathbb{R}$;

(iv) Αν μια δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x σε ένα διάστημα I με άκρα τους αριθμούς 3 και 8, αλλά δεν συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, ποιο είναι το κέντρο της δυναμοσειράς και ποια η ακτίνα σύγκλισής της;

Άσκηση 2 (Αναγνώριση δυναμοσειράς). Βρείτε το κέντρο c και τους συντελεστές $a_n, n \in \mathbb{N}$ στις ακόλουθες δυναμοσειρές.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x-1)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (7x-1)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (5x+3)^n.$$

Άσκηση 3 (Εύρεση διαστήματος σύγκλισης).

(i) Για κάθε δυναμοσειρά της Άσκησης 2 βρείτε το σύνολων όλων των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά συγκλίνει.

(ii) Επαναλάβετε το ίδιο για τις ακόλουθες δυναμοσειρές.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}}$$

Άσκηση 4 (Παράγωγος δυναμοσειράς τάξης m). Δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $m \geq 1$ κάθε δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ που συγκλίνει για κάθε x σε ένα ανοικτό διάστημα I έχει παράγωγο m-τάξης στο I, η οποία δίνεται από του τύπους

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (m+k) \cdot (m-1+k) \cdot \dots \cdot (1+k) \cdot a_{m+k} \cdot (x-c)^k \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-m+1) \cdot a_n \cdot (x-c)^{n-m} \qquad x \in I. \end{aligned}$$

Άσκηση 5. Δείξτε με τη βοήθεια του Θεωρήματος Ολοκλήρωσης Δυναμοσειρών ότι

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n, \quad |x| < 1.$$

Άσκηση 6. Σε αυτή την άσκηση **δεν** μπορείτε να πάρετε δεδομένο τον τύπο της δυναμοσειράς του ημιτόνου γιατί αυτό είναι το ζητούμενο.

(i) Βρείτε όλα τα πολυώνυμα Taylor στο 0 της συνάρτησης του ημιτόνου με τη βοήθεια του ακόλουθου τύπου:

$$\sin^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^j, & k = 2j+1 \\ 0, & k = 2j. \end{cases}$$

(ii) Αποδείξτε τον τύπο της δυναμοσειράς για τη συνάρτηση του ημιτόνου:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μπορείτε να πάρετε δεδομένο ότι η πιο πάνω δυναμοσειρά έχει άπειρη ακτίνα σύγκλισης.

Άσκηση 7. Βρείτε όλα τα πολυώνυμα Taylor στο 0 των συναρτήσεων $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x \cdot e^{-x}, \qquad g(x) = e^{x^2} + \cos x \quad x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 8.

(i) Βρείτε έναν φυσικό αριθμό n για τον οποίο

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 10^{-4}.$$

(ii) Βρείτε (με απόδειξη) τον ελάχιστο φυσικό αριθμό n με την πιο πάνω ιδιότητα.

Άσκηση 9. Δείξτε με χρήση του Θεωρήματος Taylor ότι

$$\left|\cos(2x) - \left(1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!}\right)\right| \le \frac{64x^6}{6!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.