Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

8ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Δεδομένα. Θεωρούμε γνωστούς τους κανόνες

$$\infty + x = x + \infty = \infty \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
$$-\infty + x = x - \infty = -\infty \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
$$\infty \cdot x = x \cdot \infty = \infty \quad \text{για κάθε } x > 0$$
$$\infty \cdot x = x \cdot \infty = -\infty \quad \text{για κάθε } x < 0$$
$$(-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty) = -\infty \quad \text{για κάθε } x > 0$$
$$(-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty) = \infty \quad \text{για κάθε } x < 0$$

όπως επίσης και **όλους τους υπόλοιπους κανόνες** πράξεων με το άπειρο που έχουν αναφερθεί στις διαφάνειες.

Θεωρούμε ακόμα γνωστά τα εξής: α) για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ θετικών πραγματικών αριθμών έχουμε

$$x_n \to \infty \iff \frac{1}{x_n} \to 0.$$

(Η απόδειξη αυτού γίνεται με βάση τον ορισμό της σύγκλισης). Όμοια β) για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ αρνητικών πραγματικών αριθμών έχουμε

$$x_n \to -\infty \iff \frac{1}{x_n} \to 0.$$

Με βάση αυτά και την Αρχή Μεταφοράς για τα όρια έχουμε $\lim\limits_{x\to\infty} 1/x = \lim\limits_{x\to-\infty} 1/x = 0$.

Άσκηση 1.

(i) Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3 - 3x^2 + 1) = \infty$.

Υπόδειξη: Γράψτε το πολυώνυμο ως γινόμενο $x^3 \cdot (1 - 3/x + 1/x^3)$.

(ii) Γενικότερα δείξτε ότι αν $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ τότε

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } a_k > 0, \\ -\infty, & \text{αν } a_k < 0. \end{cases}$$

(iii) Αν $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ και ο k είναι θετικός άρτιος τότε

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } a_k > 0, \\ -\infty, & \text{αν } a_k < 0. \end{cases}$$

(iv) Αν $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ και ο k είναι περιττός τότε

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } a_k < 0, \\ -\infty, & \text{αν } a_k > 0. \end{cases}$$

Λύση.

(i) Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(x^3-3x^2+1) &= \lim_{x\to\infty}\left[x^3\cdot(1-3/x+1/x^3)\right] = \lim_{x\to\infty}x^3\cdot\lim_{x\to\infty}(1-3/x+1/x^3)\\ &= \lim_{x\to\infty}x^3\cdot(1-3\cdot 0+0) = \lim_{x\to\infty}x^3 = \infty,\end{aligned}$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι $\lim\limits_{x\to\infty} 1/x^k = 0$ για κάθε $k\geq 1$.

Σχετικά με τα υπόλοιπα ερωτήματα παρατηρούμε πρώτα ότι

$$p(x) = x^k\cdot\left(a_k+\frac{a_{k-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^k}\right).$$

Ισχύει

$$\lim_{x\to\infty}\left(a_k+\frac{a_{k-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^k}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(a_k+\frac{a_{k-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^k}\right) = a_k+0+\cdots+0 = a_k.$$

Άρα από τους γνωστούς κανόνες

$$\lim_{x\to\infty}p(x) = \lim_{x\to\infty}x^k\cdot\lim_{x\to\infty}\left(a_k+\frac{a_{k-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^k}\right) = a_k\cdot\lim_{x\to\infty}x^k.$$

(ii) Από τον κανόνα $\infty\cdot\infty=\infty$ προκύπτει $\lim\limits_{x\to\infty}x^k=\infty$ και από τα προηγούμενα έχουμε

$$\lim_{x\to\infty}p(x) = a_k\cdot\lim_{x\to\infty}x^k = a_k\cdot\infty = \begin{cases}\infty, & \text{αν } a_k>0\\ -\infty, & \text{αν } a_k<0.\end{cases}$$

(iii) Από τον κανόνα $(-\infty)\cdot(-\infty)=\infty$ προκύπτει $\lim\limits_{x\to\infty}x^k=\infty$ για θετικό άρτιο αριθμό k, οπότε

$$\lim_{x\to-\infty}p(x) = a_k\cdot\lim_{x\to-\infty}x^k = a_k\cdot\infty = \begin{cases}\infty, & \text{αν } a_k>0\\ -\infty, & \text{αν } a_k<0.\end{cases}$$

(iii) Από τους κανόνες $(-\infty)\cdot(-\infty)=\infty$ και $(-\infty)\cdot\infty=-\infty$ προκύπτει $\lim\limits_{x\to\infty}x^k=-\infty$ για περιττό αριθμό k. Άρα

$$\lim_{x\to-\infty}p(x) = a_k\cdot\lim_{x\to-\infty}x^k = a_k\cdot(-\infty) = \begin{cases}\infty, & \text{αν } a_k<0\\ -\infty, & \text{αν } a_k>0.\end{cases}$$

Άσκηση 2 (Κανόνας de L' Hospital)**.** Υπολογίστε τα ακόλουθα όρια.

$$\ell_1 = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+1}{5x^2+4x}$$

$$\ell_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x^2+1}{x^2+1}$$

$$\ell_3 = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$$

Λύση.

Στο πρώτο όριο έχουμε απροσδιοριστία της μορφής ∞/∞ (Άσκηση 1). Οι συναρτήσεις είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες. Ελέγχουμε $(5x^2+4x)' = 10x+4\neq 0$ για κάθε $x>0$. (Είναι αναγκαίο η παράγωγος του παρονομαστή να μην μηδενίζεται στο διάστημα I που παίρνουμε το όριο.) Επομένως από τον Κανόνα de L' Hospital έχουμε

$$\ell_1 = \lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{10x+4}\ .$$

Αυτό οδηγεί πάλι σε μια απροσδιοριστία της μορφής ∞/∞. Επειδή $(10x+4)'=10\neq 0$ έχουμε ξανά με εφαρμογή του Κανόνα de L' Hospital,

$$\ell_1 = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+1}{5x^2+4x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{10x+4} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}\ .$$

Στο ℓ_2 παρατηρούμε ότι πάλι έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $-\infty/\infty$. Ελέγχουμε τις παραγώγους $(x^2+1)' = 2x \neq 0$ για κάθε $x>0$, $(2x)' = 2 \neq 0$ (τη δεύτερη παράγωγο την παίρνουμε γιατί θα χρειαστεί να εφαρμόσουμε δύο φορές τον Κανόνα de L' Hospital). Έχουμε

$$\ell_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-3x^2+1}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-6x}{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x-6}{2} = \lim_{x\to-\infty}(3x-3) = -\infty.$$

Στην τρίτη ισότητα εφαρμόζουμε πάλι τον κανόνα de L' Hospital γιατί το όριο μετά από παραγώγιση οδηγεί σε απροσδιοριστία της μορφής $\infty/(-\infty)$

Σχόλιο. Τα ℓ_1 και ℓ_2 μπορούν να υπολογιστούν και με πιο στοιχειώδεις μεθόδους. Όπως στις ακολουθίες μπορούμε να διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη μεγαλύτερη δύναμη του x και να χρησιμοποιήσουμε ότι $\lim\limits_{x\to\infty} 1/x^k = \lim\limits_{x\to-\infty} 1/x^k = 0$.

Στο ℓ_3 έχουμε απροσδιοριστία της μορφής ∞/∞. Η παράγωγος του παρονομαστή είναι $e^x \neq 0$ για κάθε x. Από τον Κανόνα de L' Hospital έχουμε

$$\ell_3 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 2\cdot 0 = 0,$$

όπου στην τρίτη ισότητα εφαρμόσαμε πάλι τον Κανόνα de L' Hospital γιατί έχουμε την απροσδιοριστία ∞/∞.

Άσκηση 3. Δείξτε ότι

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{για κάθε } x \in (-1,1) \text{ και } \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Λύση.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (0,\pi/2) \to (-1,1) : f(t) = \cos t$. Η f είναι $1-1$, επί και $\arccos = f^{-1}$. Έστω $x \in (-1,1)$, τότε $x = f(t) = \cos t$ για κάποιο $t \in (0,\pi/2)$. Έχουμε $f'(t) = -\sin t \neq 0$ επειδή $t \in (0,\pi/2)$. Άρα από το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης για Παραγωγίσιμες συναρτήσεις η arccos είναι παραγωγίσιμη στο x και

$$\arccos'(x) = \frac{1}{f'(t)} = -\frac{1}{\sin t}\ .$$

Εκφράζουμε την ποσότητα $\sin t$ συναρτήσει του $x = \cos t$. Από τον τύπο $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ έχουμε

$$\sin t = \pm\sqrt{1-\cos^2 t} = \pm\sqrt{1-x^2}.$$

Αφού $t \in (0,\pi/2)$ έχουμε $\sin t > 0$ άρα $t = \sqrt{1-x^2}$ και επομένως

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ .$$

Για το επόμενο θεωρούμε τη συνάρτηση $g : (-\pi/2,\pi/2) \to \mathbb{R} : g(t) = \tan t$. Η g είναι $1-1$, επί και $\arctan = g^{-1}$. Έστω $x \in \mathbb{R}$, τότε $x = g(t) = \tan t$ για κάποιο $t \in (-\pi/2,\pi/2)$. Έχουμε

$$g'(t) = \frac{\cos t\cdot\cos t - \sin t\cdot(-\sin t)}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} \neq 0.$$

Από το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης για Παραγωγίσιμες συναρτήσεις η arccos είναι παραγωγίσιμη στο x και

$$\arctan'(x) = \frac{1}{g'(t)} = \cos^2 t.$$

Εκφράζουμε την ποσότητα $\cos^2 t$ συναρτήσει του $x = \tan t$. Παίρνουμε τον τύπο $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, διαιρούμε με το $\cos^2 t$ και λαμβάνουμε

$$\tan^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}\ ,$$

άρα $x^2+1=\dfrac{1}{\cos^2 t}$ και $\cos^2 t = 1/(1+x^2)$. Καταλήγουμε

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}\ .$$

Άσκηση 4 (Ιδιάζουσες Συναρτήσεις). Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

και

$$f_2(x) = x \cdot f_1(x), \quad f_3(x) = x^2 \cdot f_1(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Δείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 0} f_1(x)$.

Υπόδειξη. Βρείτε δύο κατάλληλες ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ που συγκλίνουν στο 0 με $x_n, y_n \neq 0$ για κάθε $n \geq 1$.

(ii) Δείξτε ότι η συνάρτηση f_2 είναι συνεχής στο 0, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Υπόδειξη. Για την μη παραγωγισιμότητα θεωρήστε το λόγο $\dfrac{f_2(x)-f_2(x)}{x-0}$ για $x \neq 0$.

(iii) Δείξτε ότι η συνάρτηση f_3 είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγος f_3' δίνεται ως εξής:

$$f_3'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin(1/x) - \cos(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Είναι η f_3' συνεχής;

Υπόδειξη. Στα $x \neq 0$ μπορείτε να παραγωγίσετε την f_3 με τον συνήθη τρόπο.

Λύση.

(i) Ορίζουμε $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$ και $y_n = \dfrac{1}{2\pi n + \pi/2}$ για κάθε $n \geq 1$. Παρατηρούμε ότι $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$ και $x_n, y_n \neq 0$ για κάθε $n \geq 1$. Επιπλέον

$$f_1(x_n) = \sin(2\pi n) = 0 \quad \text{για κάθε } n \geq 1$$

και

$$f_1(y_n) = \sin(2\pi n + \pi/2) = 1 \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$ και από την Αρχή Μεταφοράς για τα όρια έχουμε ότι δεν υπάρχει το όριο της f_1 όταν το x τείνει στο 0.

(ii) Για να δείξουμε ότι η f_2 είναι συνεχής στο 0 εφαρμόζουμε την Αρχή Μεταφοράς. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών με $x_n \to 0$. Δείχνουμε ότι $f_2(x_n) \to 0$. Παρατηρούμε ότι $|f_1(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως

$$|f_2(x_n)| = |x_n \cdot f_1(x_n)| \leq |x_n| \;\longrightarrow\; 0.$$

Άρα $f_2(x_n) \to 0 = f_2(0)$.

Για να δείξουμε ότι η f_2 δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 θεωρούμε $x \neq 0$ και τον λόγο

$$\frac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0} = \frac{x\cdot f_1(x) - 0}{x} = f_1(x).$$

Επομένως, αν υπήρχε η παράγωγος της f_2 στο 0, δηλαδή αν υπήρχε το όριο του πιο πάνω λόγου όταν το x τείνει στο 0, θα υπήρχε και το όριο της f_1 όταν το x τείνει στο 0, που είναι άτοπο από το (i).

(iii) Με τους συνήθεις κανόνες παραγώγισης βρίσκουμε στα $x \neq 0$,

$$f_3'(x) = (x^2 \cdot \sin(1/x))' = 2x\sin(1/x) + x^2 \cdot (-1/x^2)\cos(1/x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Στο 0 έχουμε για $x \neq 0$,

$$\frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0} = \frac{x^2\cdot f_1(x) - 0}{x-0} = x \cdot f_1(x) = f_2(x).$$

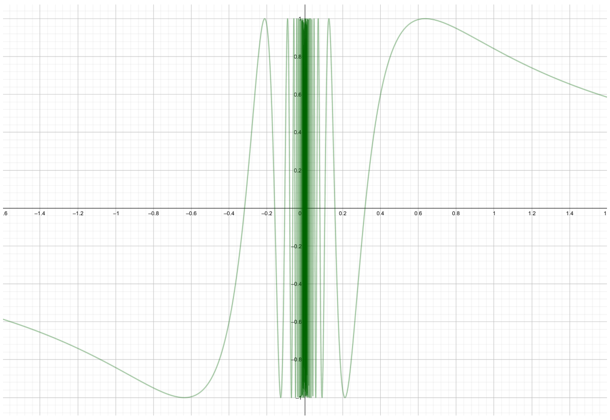
Άρα
$$f_3'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} f_2(x) = f_2(0) = 0 \cdot f_1(0) = 0,$$
όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι η f_2 είναι συνεχής στο 0.

Τέλος η f_3' δεν είναι συνεχής στο 0. Για να το δείξουμε θεωρούμε την ακολουθία $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$, $n \geq 1$. Τότε $x_n \to 0$ αλλά
$$f_3'(x_n) = 2 \cdot \frac{1}{2\pi n} \cdot \sin(2\pi n) - \cos(2\pi n) = 0 - 1 = -1$$

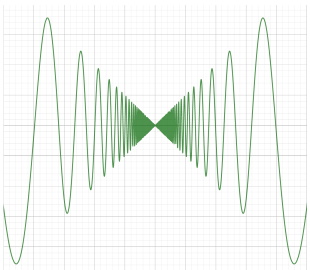
για κάθε $n \geq 1$. Επομένως $f_3'(x_n) \not\to 0 = f_3'(0)$. Από την Αρχή Μεταφοράς η f_3' δεν είναι συνεχής στο 0.

Δίνουμε τις γραφικές παραστάσεις των f_1, f_2, f_3, ο οποίες κοντά στο $x = 0$ μπορούν να κατασκευαστούν μόνο κατά προσέγγιση.

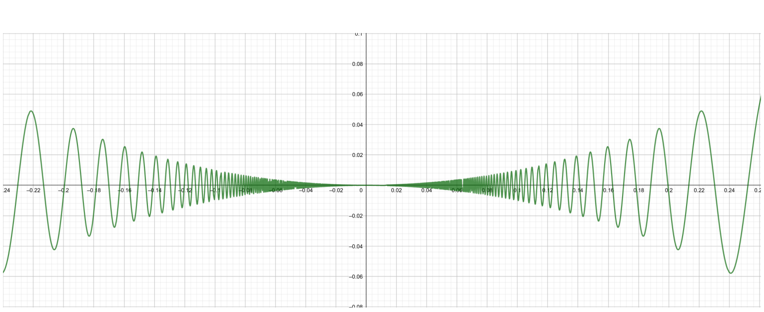
f_1 :



f_2 :



f_3 :



Άσκηση 5 (Αδυναμία εφαρμογής του Κανόνα de L' Hospital)**.**

(i) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (0,1) \to \mathbb{R} : f(x) = x + 1$ και $g(x) = x$. Δείξτε ότι τα όρια $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ διαφέρουν. Γιατί αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με τον Κανόνα de L' Hospital;

(ii) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x + \sin x$ και $g(x) = x$. Δείξτε ότι το όριο $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ είναι πραγματικός αριθμός αλλά δεν υπάρχει το όριο της f'/g' ούτε είναι $\pm\infty$ όταν το x τείνει στο ∞. (Επομένως δεν εφαρμόζεται ο Κανόνας de L' Hospital.)

Λύση.

(i) Έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \infty$$

ενώ

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1} = 1.$$

(Παρατηρήστε ότι $x > 0$ στα πιο πάνω όρια γιατί οι συναρτήσεις ορίζονται στο $(0, 1)$.)

Άρα τα δύο όρια διαφέρουν. Αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με τον Κανόνα de L' Hospital γιατί ενώ το όριο $\lim_{x\to 0} g(x)$ είναι 0, το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ **δεν είναι** 0, είναι 1. Άρα δεν είμαστε σε κάποια από τις περιπτώσεις όπου εφαρμόζεται ο κανόνας.

(iii) Παρατηρούμε πρώτα ότι $x + \sin x \geq x - 1$. Επειδή $\lim_{x\to\infty} x - 1 = \infty$ έχουμε επίσης $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Παρατηρούμε επίσης ότι

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

και παίρνοντας το όριο $x \to \infty$ έχουμε $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. Άρα

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1 + 0 = 1.$$

Από την άλλη $f'(x) = 1 + \cos x$ και $g'(x) = 1$, άρα $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 + \cos x$. Δείχνουμε ότι δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης $1 + \cos x$ όταν το x τείνει στο ∞. Προς αυτό βρίσκουμε δύο ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$ και $\lim_{n\to\infty} 1 + \cos x_n \neq \lim_{n\to\infty} 1 + \cos y_n$.

Παίρνουμε $x_n = 2\pi \cdot n$ και $y_n = 2\pi n + \pi/2$. Τότε $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$, $1 + \cos x_n = 1 + \cos(2\pi n) = 1 + 1 = 2$ για κάθε $n \geq 1$, ενώ $1 + \cos y_n = 1 + \cos(2\pi n + \pi/2) = 1 + 0 = 1$ για κάθε $n \geq 1$. Άρα δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης $1 + \cos x$ όταν το x τείνει στο ∞.