



6ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Άσκηση 1 (Κριτήριο Σύγκρισης). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n^2 + 1)}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}.$$

Υπόδειξη: Υπειθυμίζουμε την ανισότητα $\sin x \leq x$ για κάθε $x \geq 0$.

Άσκηση 2 (Κριτήριο Λόγου d' Alembert). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{n^n}.$$

Άσκηση 3 (Κριτήριο Ρίζας). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}.$$

Άσκηση 4 (Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{4n^5 - 3n + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2n + 1}{n^{7/2} + 2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 5}{2^n}.$$

Υπόδειξη: Στην πρώτη σειρά θεωρήστε την ακολουθία $b_n = \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$. Ακολουθήστε παρόμοιο συλλογισμό στις άλλες δύο σειρές.

Άσκηση 5. Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές όπως ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos(n)}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5 + 1/n)^n}{(2^n)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n \cdot (n!)^2},$$

ως προς τη σύγκλιση.

Άσκηση 6. Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$. Εξετάστε τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση.

Άσκηση 7.

(i) Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(n \cdot \pi + \frac{1}{n} \right)$$

συγκλίνει.

Υπόδειξη: Δείξτε αρχικά ότι $\sin \left(n \cdot \pi + \frac{1}{n} \right) = (-1)^n \cdot \sin \left(\frac{1}{n} \right)$ για κάθε n .

(ii) Δείξτε ότι η προηγούμενη σειρά **δεν** συγκλίνει **απολύτως**.

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα $\frac{2}{\pi} \cdot x \leq \sin x$ για κάθε $x \in [0, \pi/2]$.

(iii) Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - \sqrt{n}}$$

συγκλίνει.

(iv) Εξετάστε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} \right)$$

ως προς τη σύγκλιση.