Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

5ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Στις Ασκήσεις 3, 4 και 6 χρησιμοποιείστε τα εξής: αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ είναι συγκλίνουσες και $c \in \mathbb{R}$, τότε οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ και $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ είναι επίσης συγκλίνουσες και μάλιστα ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Άσκηση 1 (Κατανόηση σύγκλισης στα $\pm\infty$)**.** Δίνονται δύο ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με $a_n \to +\infty$ και $b_n \to -\infty$. Ποια από τα παρακάτω σύνολα περιέχουν σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και ποια σύνολα είναι πεπερασμένα;

$$\begin{aligned} A &= \{n \in \mathbb{N}^* \mid 1234567890 < a_n\} \\ B &= \{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n \leq 17\} \\ C &= \{n \in \mathbb{N}^* \mid b_n > 1,1\} \\ D &= \{n \in \mathbb{N}^* \mid b_n < -9876543210\} \end{aligned}$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση.

Το σύνολο A περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Εξήγηση: αφού $a_n \to +\infty$ για τον θετικό αριθμό $M = 1234567890$ έχουμε $a_n > M$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Το σύνολο B είναι πεπερασμένο. Εξήγηση: αφού $a_n \to +\infty$ για τον θετικό αριθμό $M = 17$ θα έχουμε $a_n > M$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Επομένως υπάρχει $n_0 \geq 1$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a_n > 17$. Επομένως αν $a_n \leq 17$ πρέπει να έχουμε $n < n_0$, δηλαδή $B \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n < n_0\}$.

Το σύνολο C είναι πεπερασμένο. Εξήγηση: αφού $b_n \to -\infty$ για τον θετικό αριθμό $M = 12345$ θα έχουμε $b_n < -M$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Επομένως υπάρχει $n_0 \geq 1$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $b_n < -12345$. Επομένως αν $b_n > 1,1$ θα έχουμε ειδικότερα ότι $b_n \geq -12345$ και άρα $n < n_0$. Προκύπτει ότι $C \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n < n_0\}$.

Το σύνολο D περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Εξήγηση: αφού $b_n \to -\infty$ για τον θετικό αριθμό $M = 9876543210$ θα έχουμε $b_n < -M$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 2 (Χρήση του συμβολισμού Σ)**.** Συμπληρώστε τα πιο κάτω κενά.

$$17\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k = \sum_{\dots}^{\dots} \;\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k = \sum_{\dots}^{\dots} \;\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_k = \sum_{j=0}^{\dots}a_{\dots}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \;\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \text{όπου } a,b\neq 0 \text{ και } n\in\mathbb{N}^*.$$

Λύση.

$$17\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k = 17\cdot(a_1+\cdots+a_n) = 17\cdot a_1+\cdots+17\cdot a_n = \sum_{k=1}^{n} 17\cdot a_k$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k &= (a_1+\cdots+a_n)+(b_1+\cdots+b_n) = (a_1+b_1)+\cdots+(a_n+b_n)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_k = a_1+\cdots+a_n = \sum_{j=0}^{n-1}a_{j+1}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0}\cdot a^n\cdot b^0+\binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b+\cdots+\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k+\cdots+\binom{n}{n}\cdot a^0\cdot b^n\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k.\end{aligned}$$

Σχόλιο: Είναι επίσης σωστό ότι $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^k\cdot b^{n-k}$, απλά τότε ο πρώτος όρος θα είναι ο $\binom{n}{0}\cdot a^0\cdot b^n$.

Άσκηση 3 (Άλγεβρα Σειρών)**.**

(i) Δώστε το παράδειγμα δύο ακολουθιών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ για τις οποίες η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ συγκλίνει αλλά οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ αποκλίνουν.

(ii) Δείξτε ότι αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ και $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνουν τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ συγκλίνει επίσης.

(iii) Δείξτε ότι αν $c\neq 0$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}c\cdot a_n$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει.

Λύση.

(i) Θέτουμε $a_n = 1$ και $b_n = -1$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε $a_n + b_n = 0$ για κάθε $n \geq 1$. Αν θέσουμε $s_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)$ τότε $s_n = 0 + \cdots + 0$ (n φορές) και συνεπώς $s_n = 0$. Άρα $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} s_n = 0$. Από την άλλη είναι σαφές ότι $a_n \not\to 0$ και $b_n \not\to 0$, συνεπώς οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνουν.

Προσοχή: Μη θεωρήσετε ότι η παραπάνω σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ μας οδηγεί σε "απροσδιοριστία του τύπου $0 \cdot \infty$". Εδώ δεν υπάρχει καμία απροσδιοριστία: το άπειρο άθροισμα είναι σαφώς ορισμένο ως το όριο της ακολουθίας των πεπερασμένων αθροισμάτων. Αν κάθε πεπερασμένο άθροισμα είναι 0 τότε το όριο της σειράς είναι και αυτό 0.

(ii) Παρατηρούμε ότι $b_n = a_n + b_n + (-1) \cdot a_n$ για κάθε $n \geq 1$. Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1) \cdot a_n$. Επιπλέον αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ συγκλίνει, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n + b_n + (-1) \cdot a_n] = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

συγκλίνει επίσης. (Άθροισμα συγκλινουσών σειρών.)

(iii) Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ συγκλίνει τότε θα συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c^{-1} \cdot (c \cdot a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Άσκηση 4 (Διερεύνηση Σύγκλισης)**.** Εξετάστε ως προς τη σύγλιση τις ακόλουθες σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad \text{όπου } |x| \geq 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n + (-1)^{n+1}\right].$$

Λύση.

Αν $|x| \geq 1$ τότε $|x^n| = |x|^n \geq 1$ για κάθε $n \geq 1$. Επομένως $x^n \not\to 0$ και άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ αποκλίνει. (Μπορεί να δειχθεί σχετικά εύκολα ότι $|x^n| \to +\infty$ όταν $|x| > 1$.)

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}$ συνέκλινε τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{-1} \cdot \frac{5}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ θα συνέκλινε επίσης που είναι άτοπο.

Σχετικά με την τρίτη σειρά θέτουμε $a_n = (-1)^n + (-1)^{n+1}$ και $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Αν ο n είναι άρτιος τότε $a_n = 1 + (-1) = 0$ και αν ο n είναι περιττός αριθμός τότε $a_n = -1 + 1 = 0$. Επομένως $a_n = 0$ για κάθε $n \geq 1$ και $s_n = a_1 + \cdots + a_n = 0$ για κάθε $n \geq 1$. Άρα $s_n \to 0$, δηλαδή $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$ και ειδικότερα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Άσκηση 5. Δίνονται $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ και $n \geq 1$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

και

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x(1 - x^n)}{1 - x}\,.$$

Υπόδειξη: Ένας τρόπος να αποδειχθεί η πρώτη ισότητα είναι με επαγωγή. Ένας άλλος τρόπος είναι να υπολογίσετε: $(1-x)\cdot\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} - x\cdot\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \ldots$.

Λύση.
Σύμφωνα με την υπόδειξη έχουμε

$$\begin{aligned}(1-x)\cdot\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} - x\cdot\sum_{k=1}^{n} x^{k-1}\\ &= \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} x^{k}\\ &= x^0 + x^1 + \cdots + x^{n-1}\\ &\quad\ - (x^1 + \cdots + x^{n-1} + x^n)\\ &= x^0 - x^n\\ &= 1 - x^n.\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$(1-x)\cdot\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = 1 - x^n$$

και διαιρώντας με το $1-x$,

$$\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x}\ .$$

Σχετικά με τη δεύτερη ισότητα έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} x^{k} = x\cdot\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = x\cdot\frac{1-x^n}{1-x}\ .$$

Άσκηση 6 (Εύρεση ορίου σειράς)**.** Βρείτε το όριο των ακόλουθων σειρών:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^{n+3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}-4^{n+2}}{5^{n+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}\ .$$

Λύση.
Στις πρώτες δύο σειρές χρησιμοποιούμε τον τύπο $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ καθώς και τις ιδιότητες των συγκλινουσών σειρών:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^{n+3} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^{n} = -\frac{8}{125}\cdot\frac{-\frac{2}{5}}{1+\frac{2}{5}} = \frac{8}{125}\cdot\frac{2}{7} = \frac{16}{875}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}-4^{n+2}}{5^{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{5^{n+1}} - \frac{4^{n+2}}{5^{n+1}}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{5^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+2}}{5^{n+1}}\\ &= \frac{3}{5}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n} - \frac{4^2}{5}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{5^n}\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} - \frac{16}{5} \cdot \frac{\frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{5}}$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2} - \frac{16}{5} \cdot 4$$

$$= \frac{9}{10} - \frac{64}{5}$$

$$= \frac{9 - 128}{10} = -\frac{119}{10} \, .$$

Η τρίτη σειρά είναι τηλεσκοπική. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \, .$$

Επομένως αν θέσουμε $a_n = \dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}$ έχουμε

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \\ a_2 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \\ a_3 &= \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \\ &\vdots \qquad \vdots \\ a_n &= \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \, . \end{aligned}$$

Άρα $a_1 + \cdots + a_n = 1 - \dfrac{1}{2n+1} \longrightarrow 1$ και επομένως $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.$