Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

4ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Άσκηση 1 (Θεωρία Σύγκλισης)**.** Θεωρούμε δύο ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ and $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ πραγματικών αριθμών. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς; Αν μια πρόταση είναι αληθής δώστε απόδειξη, αλλιώς δώστε ένα παράδειγμα όπου η πρόταση δεν ισχύει.

(i) Αν η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι φραγμένη τότε $a_n \cdot \dfrac{1}{n} \to 0$.

(ii) Αν η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι φραγμένη και η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι συγκλίνουσα τότε η $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι επίσης συγκλίνουσα.

(iii) Αν οι $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι αποκλίνουσες τότε και η $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι αποκλίνουσα.

(iv) Αν οι $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι συγκλίνουσες τότε και η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι συγκλίνουσα.

Άσκηση 2 (Όριο ρητών παραστάσεων)**.**

(i) Δείξτε ότι $\dfrac{1}{2n^2-1} \to 0$. (Χωρίς τη χρήση του ορισμού.)

(ii) Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-2n+1}{5n^3+n^2+1}$.

(iii) (Γενίκευση των προηγουμένων) Δίνονται δύο πολυώνυμα

$$p(x) = a_k x^k + \cdots + a_0 \quad \text{και} \quad q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$$

με $a_k, b_m \neq 0$, $m \geq k$ και $m \geq 1$.

Αν $k = m$ δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \frac{a_k}{b_m}$$

και αν $k < m$ δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = 0.$$

Υπόδειξη: Διαιρέστε κάθε φορά τους αριθμητή-παρονομαστή με τη μεγαλύτερη δύναμη του n.

Άσκηση 3 (Υπολογισμός ορίων)**.** Υπολογίστε τα όρια των πιο κάτω ακολουθιών:

(i) $a_n = \left(-\dfrac{7}{8}\right)^n + \sqrt[n]{n}, \quad n \geq 1.$

(ii) $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n}, \quad n \geq 1.$

(iii) $c_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}, \quad n \geq 1.$ **Υπόδειξη:** Θεωρήστε τη συζυγή παράσταση.

(iv) $d_n = \dfrac{n^2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 1}{n^3 - \sqrt[n]{n} + 1}, \quad n \geq 1.$

(v) $e_n = \sqrt[2n]{2n}, \quad n \geq 1.$ **Υπόδειξη:** Τι σχέση έχει η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με την $x_n = \sqrt[n]{n}$, $n \geq 1$;

(vi) $f_n = \sqrt[2n]{n}, \quad n \geq 1.$

Άσκηση 4 (Διερεύνηση σύγκλισης)**.** Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ που ορίζεται ως εξής:

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2} \quad n \geq 1.$$

Εξετάστε τις ακολουθίες $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ως προς τη σύγκλιση. (Δηλαδή είτε βρείτε το όριο είτε δείξτε ότι δεν συγκλίνουν.)

Υπόδειξη: Συγκλίνουν μόνο δύο από τις προηγούμενες ακολουθίες.

Άσκηση 5 (Φθίνουσα κάτω φραγμένη ακολουθία και σύγκλιση)**.** Δείξτε από τα αξιώματα του μαθήματος ότι κάθε φθίνουσα κάτω φραγμένη ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ συγκλίνει.

Υπόδειξη: Θεωρήστε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με $a_n = -b_n$ για κάθε $n \geq 1$.

Άσκηση 6 (Κριτήρια Λόγου - Ρίζας)**.** Δείξτε ότι οι πιο κάτω ακολουθίες συγκλίνουν στο 0.

$$a_n = \frac{n^3}{3^n}, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}, \quad n \geq 1,$$

$$c_n = \left(\frac{3n^2 + n + 1}{7n^4 + 1}\right)^n \quad n \geq 1,$$

$$d_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \quad n \geq 1.$$

Υπόδειξη: Για τη δεύτερη και την τέταρτη ακολουθία θυμίζουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \in (2,3)$.

Άσκηση 7 (Ακολουθίες με μεταβλητό πλήθος προσθετέων)**.** Θεωρούμε την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\ .$$

Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει:

(i) $x_{n+1} - x_n > 0$,

(ii) $x_n < 1$.

Τι συμπεραίνετε για την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$; (Μην επιχειρήσετε να υπολογίσετε κάποιο όριο.)

Άσκηση 8. Υπολογίστε τα όρια των πιο κάτω ακολουθιών:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

Υπόδειξη: Εκφράστε τις πιο πάνω ακολουθίες με τη βοήθεια της $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1.$

Άσκηση 9 (Η ακολουθία του αριθμού e - Απαιτητική)**.** Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1.$

(i) Δείξτε ότι

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \qquad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

(ii) Δείξτε ότι $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$. **Υπόδειξη:** Χρησιμοποιείστε το (i) και την ανισότητα Bernoulli.