Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

2ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Άσκηση 1. Δείξτε ότι $2^n \geq n+1$ για κάθε $n \geq 1$ με τους εξής δύο τρόπους:

(i) Με την Αρχή της Επαγωγής.

(ii) Με την ανισότητα Bernoulli.

Λύση.
(i) Για $n = 1$ έχουμε $2^n = 2^1 = 2 = 1+1 = n+1$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 1$ ισχύει $2^n \geq n+1$. Δείχνουμε ότι $2^{n+1} \geq (n+1)+1 = n+2$. Έχουμε:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot (n+1) = 2n+2 \geq n+2,$$

όπου στην πιο πάνω ανίσωση εφαρμόσαμε την Επαγωγική Υπόθεση.

Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε $2^n \geq n+1$ για κάθε $n \geq 1$.

(ii) Εφαρμόζουμε την ανισότητα Bernoulli $(1+a)^n \geq 1+na$ για $a = 1$ και έχουμε:

$$(1+1)^n \geq 1+n \cdot 1$$

ισοδύναμα: $2^n \geq n+1$.

Σχόλιο: Φαίνεται ότι ο δεύτερος τρόπος δεν χρησιμοποιεί την Αρχή της Επαγωγής, αλλά αυτό είναι μόνο επιφανειακό. Η Αρχή της Επαγωγής χρησιμοποιείται έμμεσα γιατί τη χρειαζόμαστε στην απόδειξη της ανισότητας του Bernoulli.

Άσκηση 2. Δείξτε την **αυστηρή** ανισότητα Bernoulli: για κάθε $a > -1$ με $a \neq 0$ και για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$ ισχύει:

$$(1+a)^n > 1+na.$$

Λύση.
Με επαγωγή. Θεωρούμε $a > -1$ με $a \neq 0$. Για $n = 2$ έχουμε

$$(1+a)^2 = 1+2a+a^2 > 1+2a$$

γιατί $a \neq 0$ και συνεπώς $a^2 > 0$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 2$ ισχύει $(1+a)^n > 1+na$. (Επαγωγική Υπόθεση)

Δείχνουμε ότι $(1+a)^{n+1} > 1+(n+1)a$. Έχουμε

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \cdot (1+a) > (1+na) \cdot (1+a)$$

(από επαγωγική υπόθεση και γιατί $1+a > 0$)

$$= 1+a+na+na^2 = 1+(n+1)a+na^2 > 1+(n+1)a,$$

όπου στην τελευταία ανίσωση χρησιμοποιήσαμε ότι $na^2 > 0$ γιατί $a \neq 0$.

Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 3 (Διωνυμικό Ανάπτυγμα)**.**

(i) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \geq 1$ έχουμε

$$(1+x)^n = 1+\binom{n}{1} \cdot x+\cdots+\binom{n}{n-1} \cdot x^{n-1}+x^n$$

(ii) Υπολογίστε τον αριθμό

$$a = 1 + \binom{5}{1} \cdot (-2) + \binom{5}{2} \cdot (-2)^2 + \cdots + \binom{5}{4} \cdot (-2)^4 + (-2)^5.$$

(iii) Δείξτε ότι για κάθε $x > -1$ ισχύει

$$1 + \binom{7}{1} \cdot x + \binom{7}{2} \cdot x^2 + \cdots + \binom{7}{6} \cdot x^6 + x^7 \geq 7x + 1.$$

Υπόδειξη για το (iii). Χρησιμοποιήστε την ανισότητα Bernoulli.

Λύση.
(i) Εφαρμόζουμε το διωνυμικό ανάπτυγμα

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

για $a = 1$ και $b = x$. Παρατηρούμε ότι $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

(ii) Εφαρμόζουμε το (i) για $x = -2$, $n = 5$ και έχουμε ότι

$$a = (1 + (-2))^5 = (-1)^5 = -1.$$

(iii) Εφαρμόζουμε το (i) για $n = 7$ και έχουμε ότι το αριστερό μέρος της ανισότητας είναι ίσο με $(1+x)^7$ το οποίο από την ανισότητα Bernoulli είναι μεγαλύτερο ή ίσο από $1 + 7x$, αφού $x > -1$.

Άσκηση 4 (Ισοδυναμίες φραγμένης)**.** Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) υπάρχει $M_0 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|a_n| \leq M_0$,

(ii) υπάρχει $M_1 > 0$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|a_n| \leq M_1$,

(iii) υπάρχει $M_2 > 75847912$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|a_n| \leq M_2$.

Υπόδειξη. Δείξτε τις συνεπαγωγές (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (i).

Λύση.
(i) $\Longrightarrow$ (ii) Θεωρούμε ένα $M_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|a_n| \leq M_0$. (Παρατηρούμε ότι αναγκαστικά $M_0 \geq 0$, εμείς θέλουμε να εξασφαλίσουμε ένα θετικό M_1.)

Ορίζουμε $M_1 = \max\{M_0, 1\}$. Τότε $M_1 \geq 1 > 0$ και $M_1 \geq M_0$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|a_n| \leq M_1$. Έστω $n \geq 1$. Ισχύει

$$|a_n| \leq M_0 \leq M_1$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Θεωρούμε ένα M_1 όπως στην υπόθεση και ορίζουμε $M_2 = \max\{M_1, 75847913\}$.

Τότε $M_2 > 75847912$ και $M_2 \geq M_1$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|a_n| \leq M_2$. Έστω $n \geq 1$. Ισχύει

$$|a_n| \leq M_1 \leq M_2$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Αυτό είναι προφανές. Αν το M_2 είναι όπως στην υπόθεση μπορούμε να πάρουμε $M_0 = M_2 \in \mathbb{R}$ και έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 5 (Ισοδυναμίες φραγμένης)**.** Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|a_n| \leq M$,

(ii) υπάρχουν $M_1, M_2 > 0$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $-M_1 \leq a_n \leq M_2$.

Λύση.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Θεωρούμε $M \in \mathbb{R}$ για το οποίο για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|a_n| \leq M$. Τότε $-M \leq a_n \leq M$ για κάθε $n \geq 1$ και επομένως μπορούμε να πάρουμε $M_1 = M_2 = M$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Θεωρούμε $M_1, M_2 > 0$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $-M_1 \leq a_n \leq M_2$. Ορίζουμε $M = \max\{M_1, M_2\}$. Τότε $M \geq M_1 > 0$, άρα $M > 0$. Δείχνουμε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|a_n| \leq M$.

Έστω $n \geq 1$. Ισχύει

$$-M \leq -M_1 \leq a_n \leq M_2 \leq M.$$

Επομένως $-M \leq a_n \leq M$, ισοδύναμα $|a_n| \leq M$.

Άσκηση 6 (Αρχιμήδεια Ιδιότητα και Αρχή του Ελαχίστου)**.** Δείξτε τα εξής:

(i) Για κάθε $x \geq 0$ υπάρχει ο ελάχιστος φυσικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος του x.

Υπόδειξη. Θεωρήστε το σύνολο $A = \{k \in \mathbb{N} \mid k > x\}$.

(ii) Για κάθε $x \geq 0$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n με $n \leq x < n+1$.

(iii) Για κάθε $y < 0$ υπάρχει ένα $m \in \mathbb{Z}$ με $m \leq y < m+1$.

(iv) Συμπεράνετε ότι για κάθε $z \in \mathbb{R}$ υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ με $m \leq z < m+1$.

Σχόλιο. Αποδεικνύεται ότι αυτό το $m \in \mathbb{Z}$ είναι μοναδικό για το z. Αυτό το μοναδικό m ονομάζεται **το ακέραιο μέρος του** z. Για παράδειγμα το ακέραιο μέρος του $3,14$ είναι το 3 και το ακέραιο μέρος του $-3,14$ είναι το -4.

Λύση.

Για το (i) θεωρούμε το σύνολο $A = \{k \in \mathbb{N} \mid k > x\}$. Το σύνολο A είναι μη κενό από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα. Επιπλέον το A είναι υποσύνολο των φυσικών αριθμών. Επομένως από την Αρχή του Ελαχίστου το A έχει ελάχιστο στοιχείο. Με άλλα λόγια υπάρχει ο ελάχιστος φυσικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος του x.

Για το (ii) παίρνουμε k να είναι ο ελάχιστος φυσικός μεγαλύτερος του x. Ειδικότερα ισχύει $k > x$. Επειδή $k > x \geq 0$ έχουμε $k > 0$ και άρα $k - 1 \in \mathbb{N}$. Εφόσον ο k είναι ο *ελάχιστος* φυσικός μεγαλύτερος του x θα έχουμε $k - 1 \leq x < k$. Επομένως μπορούμε τότε να πάρουμε $n = k - 1 \in \mathbb{N}$.

Για το (iii) εφαρμόζουμε το (ii) για $x = -y > 0$ και έχουμε ένα $n \in \mathbb{N}$ με $n \leq -y < n+1$. Τότε ισχύει

$$-n-1 < y \leq -n.$$

Αν $y < -n$ παίρνουμε $m = -n-1 \in \mathbb{Z}$ και έχουμε $m < y < m+1$. Αν $y = -n$ παίρνουμε $m = -n \in \mathbb{Z}$ και έχουμε $m = y < m+1$.

Το (iv) είναι άμεσο από τα προηγούμενα: αν $z \geq 0$ εφαρμόζουμε το (ii) για $z = x \geq 0$ και παίρνουμε $m = n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ και αν $z < 0$ εφαρμόζουμε το (iii) για $z = y < 0$.