



# 1ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:  
Β. Γρηγοριάδης  
Κ. Παυλοπούλου  
Γ. Μανουσάκης

**Άσκηση 1.** Δείξτε ότι:

- (i)  $2n^2 > 2n + 1$  για κάθε φυσικό αριθμό  $n \geq 2$ .  
(ii)  $3^n > n^2$  για κάθε φυσικό αριθμό  $n \geq 2$ .

*Σχόλιο:* Παρατηρούμε ότι για  $n = 0, 1$  η (i) **δεν** ισχύει. Από την άλλη η (ii) ισχύει για  $n = 0, 1$ . Παρ' όλα αυτά στην (ii) ξεκινάμε την επαγωγή από το  $n = 2$ . Αυτό το κάνουμε γιατί θα χρησιμοποιήσουμε την (i) που ισχύει για  $n \geq 2$ .

**Άσκηση 2.** Δείξτε ότι ο αριθμός  $(2n + 1)^2 - 1$  είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 8 για κάθε φυσικό αριθμό  $n \geq 1$ .

**Άσκηση 3.** Δείξτε ότι:

(i)  $2 + 5 + \dots + (3n - 1) = \frac{n(3n + 1)}{2}$  για κάθε  $n \geq 1$ .

(Όταν  $n = 1$  θεωρούμε ότι το αριστερό σκέλος είναι ίσο με 2, δηλαδή σε αυτή την περίπτωση το άθροισμα αποτελείται μόνο από τον πρώτο όρο του.)

(ii)  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$  για κάθε  $n \geq 1$ .

(Όπως πιο πάνω όταν  $n = 1$  θεωρούμε ότι το αριστερό σκέλος είναι ίσο με  $1^2 = 1$ .)

**Άσκηση 4.** Δείξτε ότι το σύνολο  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid (n - 3) \cdot (n + 2) \cdot (n + 4) > 0\}$  είναι μη κενό και βρείτε το ελάχιστο στοιχείο του.

**Άσκηση 5.** Να βρείτε το minimum/maximum των ακόλουθων συνόλων εφόσον αυτά υπάρχουν (πλήρης δικαιολόγηση):

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x^2 - 1 \leq 15\}$$

$$B = (1, 2]$$

$$C = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x \leq 1\}$$

$$D = \{n^2 + 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

**Υπόδειξη.** Για να δείξουμε ότι ένα μη κενό σύνολο  $X \subseteq \mathbb{R}$  δεν έχει minimum θεωρούμε ένα  $x \in X$  και δείχνουμε ότι υπάρχει  $y \in X$  που είναι μικρότερο του  $x$ .

---

**Άσκηση 6** (Απαιτητική). Δείξτε την Αρχή του Ελαχίστου με τη βοήθεια της Αρχής της Επαγωγής.

**Υπόδειξη.** Θεωρήστε ένα σύνολο  $A \subseteq \mathbb{N}$  που δεν έχει minimum και εφαρμόστε την Αρχή της Επαγωγής παίρνοντας για ιδιότητα  $P$  το εξής:

το  $n \in \mathbb{N}$  έχει την ιδιότητα  $P$  αν για κάθε φυσικό  $k \leq n$  έχουμε  $k \notin A$ .

Συμπεράνετε ότι ένα  $A \subseteq \mathbb{N}$  που δεν έχει minimum πρέπει να είναι το κενό σύνολο.