

Όριο - Παράγωγος

Βασίλειος Γρηγοριάδης

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Όριο Συνάρτησης - Διαισθητική Προσέγγιση

- 1 Ορίζεται η έννοια του ορίου συνάρτησης f όταν το x τείνει σε κάποιο x_0 ή στο $\pm\infty$. Συμβολισμός: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ - το όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 είναι ℓ .
- 2 Διαισθητικά σημαίνει όταν το x βρίσκεται "κοντά" στο x_0 τότε η τιμή $f(x)$ βρίσκεται κοντά στο όριο.
- 3 Το σημείο x_0 **δεν μπορεί** να είναι **εντελώς τυχαίο**.
Απαραίτητη προϋπόθεση για τον ορισμό του ορίου: πρέπει να υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ του πεδίου ορισμού που να συγκλίνει στο x_0 και να ικανοποιεί $x_n \neq x_0$ για κάθε $n \geq 1$.
- 4 Μπορεί το x_0 να μην είναι στοιχείο του πεδίου ορισμού της f .

Παραδείγματα: 1) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x$. Τότε μπορούμε να μιλήσουμε για το όριο της f όταν το x τείνει στο 0, όταν το x τείνει στο $+\infty$, όταν το x τείνει στο 200, αλλά όχι όταν το x τείνει στο -1 .

2) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: [0, 1] \cup \{2\} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x$. Τότε μπορούμε να μιλήσουμε για το όριο της f όταν το x τείνει σε κάποιο $x_0 \in [0, 1]$. Αλλά δεν μπορούμε να μιλήσουμε για το όριο της f όταν το x τείνει στο 2, γιατί δεν υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ του πεδίου ορισμού της f που να συγκλίνει στο 2 και να ικανοποιεί $x_n \neq 2$ για κάθε $n \geq 1$.

Ιδιότητες: Στα όρια ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες:

Π.χ.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad \text{κ.τ.λ.}$$

Όριο και Συνέχεια: Στην περίπτωση που το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της f και μπορούμε να πάρουμε το όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 τότε η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Όριο και σύνθεση συναρτήσεων: Αν υπάρχει το όριο $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και η g είναι συνεχής στο a τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right) = g(a).$$

Θεώρημα: (Αρχή Μεταφοράς για τα όρια)

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ για το οποίο υπάρχει $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ από στοιχεία του A που συγκλίνει στο x_0 και $x_n \neq x_0$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε για κάθε συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και κάθε $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- 1 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.
- 2 Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ από στοιχεία του A με την ιδιότητα $x_n \rightarrow x_0$ και $x_n \neq x_0$ για κάθε $n \geq 1$, ισχύει $f(x_n) \rightarrow \ell$.

Η Αρχή Μεταφοράς για τα όρια μας βοηθά να υπολογίσουμε όρια συναρτήσεων.

Παράδειγμα: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: με

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0, \\ 17, & x = 0. \end{cases}$$

Δείχνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών που συγκλίνει στο 0 με $x_n \neq 0$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε $f(x_n) = x_n^2 \rightarrow 0$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Η Αρχή Μεταφοράς βοηθά στο να δείξουμε τη **μη-ύπαρξη του ορίου**.

Κριτήριο μη-ύπαρξης ορίου. Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ και υπάρχουν δύο ακολουθίες $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ στο A με τις ιδιότητες:

- 1 $x_n \neq x_0$ και $y_n \neq x_0$ για κάθε $n \geq 1$,
- 2 $x_n \rightarrow x_0$ και $y_n \rightarrow x_0$, και
- 3 $f(x_n) \rightarrow \ell_1$, $f(y_n) \rightarrow \ell_2$ και $\ell_1 \neq \ell_2$ (μπορεί $\ell_1, \ell_2 = \pm\infty$),

τότε **δεν υπάρχει** το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = 1/x$. Δείχνουμε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Πρέπει να **βρούμε** δύο κατάλληλες ακολουθίες. Παίρνουμε $x_n = 1/n$ και $y_n = -1/n$. Τότε $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow 0$, $x_n \neq 0$ και $y_n \neq 0$ για κάθε $n \geq 1$.

Επιπλέον $f(x_n) = n \rightarrow +\infty$ και $f(y_n) = -n \rightarrow -\infty$. Άρα δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Μερικοί κανόνες πράξεων με το άπειρο:

$$\begin{aligned} \infty + \infty &= \infty & -\infty - \infty &= -\infty & \infty \cdot \infty &= \infty \\ (-\infty) \cdot (-\infty) &= \infty & (-\infty) \cdot \infty &= -\infty & \infty^{\infty} &= \infty \end{aligned}$$

Π.χ. $\infty + \infty = \infty$ σημαίνει πως αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$
τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \infty$.

$$\infty + x = x + \infty = \infty \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$-\infty + x = x - \infty = -\infty \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\infty \cdot x = x \cdot \infty = \infty \quad \text{για κάθε } x > 0$$

$$\infty \cdot x = x \cdot \infty = -\infty \quad \text{για κάθε } x < 0$$

$$(-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty) = -\infty \quad \text{για κάθε } x > 0$$

$$(-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty) = \infty \quad \text{για κάθε } x < 0$$

$$\frac{1}{\pm\infty} = 0.$$

Απροσδιόριστες μορφές ορίων:

$$\infty - \infty \quad -\infty + \infty \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad \frac{0}{0} \quad \pm\infty \cdot 0 \quad 0^0 \quad \infty^0 \quad 1^\infty \quad 0^\infty$$

Απροσδιόριστη μορφή, π.χ. για το $\infty - \infty$ σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε συναρτήσεις f_1, f_2 και g_1, g_2 με

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_i(x) = \infty, \quad i = 1, 2, \text{ αλλά}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) - g_1(x)] \neq \lim_{x \rightarrow x_0} [f_2(x) - g_2(x)].$$

Π.χ. $f_1(x) = 1/x^2 = g_2(x)$, $g_1(x) = 1/x^2 + 1 = f_2(x)$ για $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, παίρνουμε όρια στο $x_0 = 0$.

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} f_i(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g_i(x) = \infty$, $i = 1, 2$ και πως $f_1(x) - g_1(x) = -1$, $f_2(x) - g_2(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πλευρικά όρια. Ορίζονται οι έννοιες του ορίου όταν το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά και του ορίου όταν το x τείνει στο x_0 από τα αριστερά (πλευρικά όρια).

Ισχύουν τα ανάλογα με πριν. Απλώς όπου έχουμε ακολουθίες πρέπει αυτές να βρίσκονται στην αντίστοιχη πλευρά του x_0 . Π.χ. Για να ορίζεται η έννοια του ορίου της f όταν το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά πρέπει να υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ στο πεδίο ορισμού της f με $x_0 < x_n$ για κάθε $n \geq 1$.

Παράγωγος συνάρτησης

- 1 Ορίζεται η έννοια της παραγώγου συνάρτησης $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ σε ένα σημείο x_0 .
- 2 Τώρα το A είναι αναγκαστικά **διάστημα** και **το x_0 ανήκει στο A .**
- 3 Για να ορίσουμε την παράγωγο της f στο σημείο x_0 θεωρούμε αρχικά τη συνάρτηση

$$\varphi : A \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R} : \varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

Επειδή υποθέσαμε ότι το A είναι διάστημα υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ στοιχείων του A που συγκλίνει στο x_0 και ικανοποιεί $x_n \neq x_0$ για κάθε $n \geq 1$. Επομένως ορίζεται η έννοια του ορίου της φ όταν το x τείνει στο x_0 .

Ορισμός:

Έστω A ένα διάστημα του \mathbb{R} , $x_0 \in A$ και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Η **συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0** ή αλλιώς **διαφορίσιμη στο x_0** αν το πιο κάτω όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Σε αυτή την περίπτωση το πιο πάνω όριο συμβολίζεται με $f'(x_0)$ ή $\frac{df}{dx}(x_0)$ και ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** .

Η f λέγεται **παραγωγίσιμη** ή αλλιώς **διαφορίσιμη** αν υπάρχει η παράγωγος $f'(x)$ **σε κάθε** $x \in A$.

Η παράγωγος της f στο x_0 είναι η κλίση της ευθείας που εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

Βασικές ιδιότητες:

- 1 Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε είναι και συνεχής στο x_0 .
- 2 Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά, π.χ. $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο 0 αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.
- 3 Μάλιστα γνωρίζουμε ότι υπάρχουν συναρτήσεις $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι συνεχείς σε **κάθε** $x \in [0, 1]$ αλλά δεν παραγωγίζονται σε **κανένα** $x \in [0, 1]$.
- 4 Ισχύουν όλοι οι γνωστοί κανόνες παραγωγίσιμης, π.χ. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
 $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ κ.τ.λ.
- 5 Επομένως σε πολλές περιπτώσεις μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο με βάση τους γνωστούς κανόνες. Σε κάποιες όμως εξαιρετικές περιπτώσεις η παράγωγος υπολογίζεται με βάση τον ορισμό.

Οι παράγωγοι μερικών γνωστών συναρτήσεων

Συνάρτηση f	Παράγωγος f'
1 Σταθερή	0
2 x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	nx^{n-1}
3 x^q ($q \in \mathbb{Q}$, $x > 0$)	qx^{q-1} ($q \in \mathbb{Q}$, $x > 0$)
4 $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$	$na_n x^{n-1} + \dots + a_1$
5 $\sin x$	$\cos x$
6 $\cos x$	$-\sin x$
7 $\tan x$	$1/\cos^2(x)$
8 e^x	e^x
9 a^x ($a > 0$)	$a^x \cdot \ln(a)$ ($a > 0$)
10 $\ln x$ ($x > 0$)	$1/x$ ($x > 0$)

Σημείωση: Με τις συναρτήσεις e^x , a^x και $\ln x$ θα ασχοληθούμε πιο εκτενώς σε μεταγενέστερο μάθημα.

Θεώρημα: (de L' Hospital)

Θεωρούμε ένα ανοικτό διάστημα I , ένα σημείο x_0 που ανήκει στο I ή είναι άκρο του I και συναρτήσεις $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. (Μπορεί να έχουμε $I = (-\infty, 0)$ και $x_0 = -\infty$.) Υποθέτουμε ότι έχουμε τα εξής:

- 1 οι f, g είναι παραγωγίσιμες σε όλο το I εκτός ίσως από το x_0 ,
- 2 $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$ με $x \neq x_0$,
- 3 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$,
- 4 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Τότε
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Θεώρημα: (Θεώρημα Μέσης Τιμής)

Έστω $a < b$ και συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) . Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ειδική Περίπτωση (Θεώρημα του Rolle): Αν $a < b$, η $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) και αν $f(a) = f(b)$ τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $f'(\xi) = 0$.

Πόρισμα: Αν $a < b$, η $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Απόδειξη: Έστω $c, d \in [a, b]$ με $c < d$. Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (c, d)$ με $f'(\xi) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}$.

Αφού $f'(\xi) = 0$ έχουμε $f(c) = f(d)$.

Παράγωγος Αντίστροφης Συνάρτησης

Θεώρημα: (Αντίστροφης Συνάρτησης για Παραγωγίσιμες Συναρτήσεις)

Έστω $a < b$ και $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, 1-1 και παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a, b)$.

Αν $f'(x_0) \neq 0$ τότε η $f^{-1}: f((a, b)) \rightarrow (a, b)$ είναι παραγωγίσιμη στο $y_0 = f(x_0)$ και η παράγωγός της δίνεται από τη σχέση

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

Παράδειγμα: Θεωρούμε τη συνάρτηση

$f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) : f(x) = x^2$. Η f είναι 1-1 και παραγωγίσιμη με

$f'(x) = 2x$. Η αντίστροφη συνάρτηση είναι η

$f^{-1}: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) : f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Από το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης έχουμε

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x}$$

όπου $y = f(x) = x^2$, $x \in (0, \infty)$.

(Παρατηρούμε ότι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$.)

Άρα $x = \sqrt{y}$ και επομένως

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \cdot y^{-1/2}.$$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις \sin , \cos , και \tan **περιορισμένες κατάλληλα** είναι 1-1 και επί.

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις \sin , \cos , και \tan **περιορισμένες κατάλληλα** είναι 1-1 και επί. Συμβολίζουμε με **arcsin**, **arccos** και **arctan** τις αντίστοιχες αντίστροφες συναρτήσεις:

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις \sin , \cos , και \tan **περιορισμένες κατάλληλα** είναι 1-1 και επί. Συμβολίζουμε με **arcsin**, **arccos** και **arctan** τις αντίστοιχες αντίστροφες συναρτήσεις:

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Οι αντίστροφες συναρτήσεις συμβολίζονται στα ελληνικά ως Τοξημ, Τοσυν και Τοξεφ αντίστοιχα. Διαβάζονται "τόξο-ημίτονο", "τόξο-συνημίτονο" και "τόξο-εφαπτομένη" αντίστοιχα.

Υπολογισμός παραγώγου της συνάρτησης \arcsin .

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1] : f(x) = \sin(x)$.

Είναι συνεχής, 1-1 και παραγωγίσιμη. Έστω $x \in [-\pi/2, \pi/2]$,

εξετάζουμε που έχουμε $f'(x) = 0$.

Ισχύει $f'(x) = \cos x$ άρα $f'(x) = 0$ ακριβώς όταν $x = \pm\pi/2$.

Επομένως $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Θεωρούμε $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ και $y = \sin x \in (-1, 1)$. Από το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης η \arcsin είναι παραγωγίσιμη στο y και

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x}.$$

Τέλος εκφράζουμε το $\cos x$ ως συνάρτηση του y . Από τη σχέση $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ βρίσκουμε $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm\sqrt{1 - y^2}$.

Επειδή $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\cos x > 0$ άρα παίρνουμε το $\sqrt{1 - y^2}$.

Καταλήγουμε:

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad y \in (-1, 1).$$

Η παράγωγος της \arcsin δεν υπάρχει στα $y = \pm 1$.

Τύποι παραγώγων αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad x \in (-1, 1)$$

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad x \in (-1, 1)$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in \mathbb{R}.$$