ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

Γραμμική Άλγεβρα
7. Ορίζουσες Τετραγωνικών Πινάκων

Κάλλια Παυλοπούλου

2021-2022

Ορίζουσα

Η ορίζουσα (determinant) είναι μία συνάρτηση

$$\boxed{detA\colon\ M_\nu \to R}$$

που σε κάθε τετραγωνικό πίνακα A διάστασης $\nu \times \nu$ αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό. Η τιμή της ορίζουσας του A συμβολίζεται με $detA$ ή με $|A|$.

Ορίζουσα 2×2

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \in M_{2x2}$.

Η ορίζουσα του A είναι ο αριθμός :

$$\boxed{detA = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{21} \cdot \alpha_{12}}$$

Ορίζουσα 3×3

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \in M_{3\times3}$.

Η ορίζουσα του A είναι ο αριθμός

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{detA} &= \boldsymbol{\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{33} + \alpha_{12} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{31} + \alpha_{13} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{32}} \\ &\quad \boldsymbol{- \alpha_{12} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{33} - \alpha_{11} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{32} - \alpha_{13} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{31}} \end{aligned}}$$

Υπολογισμός ορίζουσας 3×3 - Κανόνας του Sarrus

Ξαναγράφουμε τις δυο πρώτες στήλες δεξιά του αρχικού πίνακα και υπολογίζουμε τα έξι γινόμενα ως εξής:

$\boldsymbol{\alpha_{33} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{12}}$

$\boldsymbol{\alpha_{32} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{11}}$

$\boldsymbol{\alpha_{31} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{13}}$

(+) (+) (+) (−) (−) (−)

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{matrix}$

$\boldsymbol{\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{33}}$

$\boldsymbol{\alpha_{12} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{31}}$

$\boldsymbol{\alpha_{13} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{32}}$

Παράδειγμα (εφαρμόζοντας κανόνα Sarrus):

Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 5\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\in M_{3x3}$.

Λύση:

$$\begin{matrix} & - & - & - \\ & 5 & 12 & 0 \end{matrix}$$

$$detA=\begin{bmatrix}2 & -1 & 5\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}2 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 2\end{matrix} = +0+(-3)+0-5-12-0=-20$$

$$\begin{matrix} & 0 & -3 & 0 \\ & + & + & + \end{matrix}$$

Ελάσσων πίνακας

Για $\nu > 2$, θα δώσουμε έναν αναδρομικό τύπο για την ορίζουσα με τη βοήθεια των οριζουσών κάποιων υπο-πινάκων του A διάστασης $(\nu-1)\times(\nu-1)$.

Οι πίνακες αυτοί, λέγονται **ελάσσονες (minor) πίνακες του A** και συμβολίζονται με A_{ij}. Ο A_{ij} είναι ο υπο-πίνακας του στοιχείου α_{ij} του A που προκύπτει από τον A αν αγνοήσουμε την i-γραμμή και την j-στήλη του A .

<u>Παράδειγμα</u>: Για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, ο ελάσσονας πίνακας A_{32} είναι ο υποπίνακας διάστασης 2×2 που προκύπτει αν αγνοήσουμε την 3η γραμμή και την 2η στήλη του A . Πρόκειται λοιπόν για τον πίνακα $A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

Ορίζουσα (υπολογισμός με ελάσσονες πίνακες)

Η ορίζουσα ενός πίνακα $A = \left[a_{ij}\right] \in M_\nu$ δίνεται από τον τύπο

$$\boxed{detA = a_{11}detA_{11} - a_{21}detA_{21} + \cdots + (-1)^{\nu+1}a_{\nu 1}detA_{\nu 1}}$$

όπου A_{ij} οι ελάσσονες πίνακες του A .

Σημείωση: Στον παραπάνω τύπο η ανάπτυξη της ορίζουσας του πίνακα A έγινε ως προς τα στοιχεία της 1ης στήλης. Η ορίζουσα του A μπορεί να υπολογιστεί με αντίστοιχη ανάπτυξη ως προς τα στοιχεία μίας οποιασδήποτε στήλης ή γραμμής.

Ορίζουσα (υπολογισμός με ελάσσονες πίνακες)

Η ορίζουσα ενός πίνακα $A = [a_{ij}] \in M_\nu$ για $\nu > 1$ δίνεται από τον τύπο

$$detA = \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, detA_{ij}$$, για οποιαδήποτε γραμμή $i, 1 \leq i \leq \nu$.

ή αντίστοιχα,

$$detA = \sum_{i=1}^{\nu} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, detA_{ij}$$, για οποιαδήποτε στήλη j, $1 \leq j \leq \nu$.

όπου A_{ij} οι ελάσσονες πίνακες του A .

Σημείωση: Αν $\nu = 1$, τότε $detA = \alpha_{11}$.

Ο αριθμός $\boldsymbol{C_{ij}} = (-\mathbf{1})^{i+j} \boldsymbol{detA_{ij}}$ ονομάζεται **αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου α_{ij} (cofactor).**

Παράδειγμα (υπολογίζοντας με ελάσσονες πίνακες):

Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα του $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, του προηγούμενου παραδείγματος.

Ανάπτυγμα ως προς τα στοιχεία της 1ης στήλης:

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = +2 \cdot detA_{11} - 0 \cdot detA_{21} + 1 \cdot detA_{31} =$$

$$= +2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6) + 0 + (-3 - 5) = -12 - 8 = -20\,.$$

Μπορούμε να την υπολογίσουμε ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη, αρκεί να εφαρμόσουμε τον κανόνα της σκακιέρας για τα πρόσημα.

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Παράδειγμα (υπολογίζοντας με ελάσσονες πίνακες):

Στην πράξη το ανάπτυγμα που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό μιας ορίζουσας είναι ως προς τη γραμμή ή τη στήλη που έχει τα περισσότερα μηδενικά στοιχεία.

Π.χ. $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{matrix} + & - & + \end{matrix}$$

Α΄τρόπος: Ανάπτυγμα ως προς τα στοιχεία της 3ης γραμμής

$$detB = |B| = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 3 - 2 \cdot 2) = 1$$

Β΄τρόπος: Ανάπτυγμα ως προς τα στοιχεία της 1ης γραμμής

$$\begin{matrix} + & - & + \end{matrix}$$

$$detB = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = -3 + 4 = 1$$

Ιδιότητες οριζουσών

1) Ανάστροφοι πίνακες έχουν την ίδια ορίζουσα $\boldsymbol{det(A^T) = detA}$.

2) Η εναλλαγή δύο γραμμών (ή στηλών) επιφέρει αλλαγή στο πρόσημο της ορίζουσας $\boldsymbol{detB = -detA}$.

3) Αν ο πίνακας A έχει δύο γραμμές ή στήλες ίσες ή ανάλογες (δηλ. η μία είναι το πολλαπλάσιο της άλλης), τότε $\boldsymbol{detA = 0}$.

4) Αν πολλαπλασιαστεί μία γραμμή ή στήλη με έναν αριθμό $\lambda \neq 0$ τότε όλη ορίζουσα πολλαπλασιάζεται επί λ, $\boldsymbol{detB = \lambda \cdot detA}$. Κατά συνέπεια: $\boldsymbol{det(\lambda \cdot A) = \lambda^{\nu} \cdot detA}$.

5) Αν ο πίνακας A έχει μία μηδενική γραμμή ή στήλη, τότε $\boldsymbol{detA = 0}$.

6) Μία ορίζουσα ανάγεται σε άθροισμα δυο οριζουσών αν κάθε στοιχείο μιας στήλης ή γραμμής είναι άθροισμα δύο προσθετέων.

Ιδιότητες οριζουσών (συνέχεια)

7) Η ορίζουσα του πίνακα δεν μεταβάλλεται αν σε μια γραμμή (ή στήλη) προσθέσω ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης $\boldsymbol{detB = detA}$.

8) Αν ο πίνακας A είναι άνω τριγωνικός ή κάτω τριγωνικός, τότε η ορίζουσά του είναι ίση με το **γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του**. (Ειδικότερα η ορίζουσα του μοναδιαίου πίνακα είναι ίση με 1, δηλαδή $\boldsymbol{detI_n = 1}$.)

9) Το γινόμενο δύο οριζουσών είναι ίσο με την ορίζουσα του γινομένου τους, δηλαδή $\boldsymbol{det(AB) = detA \cdot detB}$, όπου $A, B \in M_\nu$. Κατά συνέπεια: $\boldsymbol{det\left(A^{-1}\right) = 1/detA}$.

10) Συνήθως $\boldsymbol{det(A+B) \neq detA + detB}$, όπου $A, B \in M_\nu$.

Ιδιότητες οριζουσών 6 και 7 (εφαρμογή σε ορίζουσα 3×3)

6) Μία ορίζουσα ανάγεται σε άθροισμα δυο οριζουσών αν κάθε στοιχείο μιας στήλης ή γραμμής είναι άθροισμα δύο προσθετέων.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 + d_1 & b_2 + d_2 & b_3 + d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

7) Η ορίζουσα του πίνακα δεν μεταβάλλεται αν σε μια γραμμή (ή στήλη) προσθέσω ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 + \lambda a_1 & b_2 + \lambda a_2 & b_3 + \lambda a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Ιδιότητα οριζουσών 4 (εφαρμογή σε ορίζουσα 3×3)

Αν πολλαπλασιαστεί μία γραμμή με έναν αριθμό $\lambda \neq 0$ τότε όλη ορίζουσα πολλαπλασιάζεται επί λ, $\boldsymbol{detB = \lambda \cdot detA}$.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \lambda b_1 & \lambda b_2 & \lambda b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Κατά συνέπεια: $\boldsymbol{det(\lambda \cdot A) = \lambda^{\nu} \cdot detA}$.

$$|\lambda \mathrm{A}| = \begin{vmatrix} \lambda\alpha_1 & \lambda\alpha_2 & \lambda\alpha_3 \\ \lambda b_1 & \lambda b_2 & \lambda b_3 \\ \lambda c_1 & \lambda c_2 & \lambda c_3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \lambda \cdot \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda^3 \cdot detA$$

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα: $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

Λύση:

Θα μετατρέψουμε με κατάλληλους μετασχηματισμούς τον πίνακα σε τριγωνικό κι έτσι η ορίζουσά του θα υπολογιστεί εύκολα.

Προσοχή!

Αν κατά τη μετατροπή υπάρχει κάποια γραμμή του πίνακα που πολλαπλασιάζεται με έναν μη μηδενικό αριθμό λ τότε επειδή η ορίζουσα του πίνακα πολλαπλασιάζεται με αυτόν τον αριθμό λ θα πρέπει στο τέλος να διαιρέσουμε την τιμή της ορίζουσας που θα βρούμε με αυτόν τον αριθμό λ.

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

Λύση:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 + 2L_1 \\ L_4 \to L_4 - 3L_1}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = C_{trig}$$

Ιδιότητα 7

Ιδιότητα 8

Άρα $detC = detC_{trig} = det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot (+3) \cdot 6 \cdot (-1) = -18$

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & -5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Λύση

Θα προσπαθήσουμε να εμφανίσουμε μηδενικά με τη βοήθεια στοιχειωδών πράξεων:

Ιδιότητα 7

$L2 \to L2 - L1$
$L3 \to L3 + L1$

Ανάπτυγμα ως προς τα στοιχεία της 1ης στήλης

Ιδιότητα 7

$L2 \to L2 - 3L1$
$L3 \to L3 + 3L1$

$$detD = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & -5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} -4 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{matrix} \end{vmatrix} = +2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{matrix} \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot (-4) = -24$$

Ανάπτυγμα ως προς τα στοιχεία της 1ης στήλης

Ορίζουσα 2×2

Παράδειγμα 3: Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα: $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$.

Λύση:

Ιδιότητα 7

$C2 \to C2 - C1$
$C3 \to C3 - C1$

Ανάπτυγμα ως προς τα στοιχεία της 1ης γραμμής

$$detE = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$

Ορίζουσα 2×2

$$= (b-a)(c-a)(c+a) - (c-a)(b-a)(b+a) =$$

$$= (b-a)(c-a)(c+a-b-a) = \boxed{(b-a)(c-a)(c-b)}$$

Παράδειγμα 4 (ανάπτυγμα ως προς μία στήλη & ιδιότητες)

Να υπολογίσετε την ορίζουσα: $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & \alpha & b & c \\ 2 & \alpha & b & c \\ 7 & 15 & 5 & 10 \end{vmatrix}$

Λύση:

Ανάπτυγμα ως προς τα στοιχεία της 1ης στήλης

Ιδιότητα 3: δύο γραμμές ανάλογες

$$\begin{vmatrix} \boxed{-1} & 3 & 1 & 2 \\ \boxed{0} & \alpha & b & c \\ \boxed{2} & \alpha & b & c \\ \boxed{7} & 15 & 5 & 10 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 15 & 5 & 10 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ a & b & c \\ 15 & 5 & 10 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$$

Ιδιότητα 3:
δύο ίσες γραμμές

Παράδειγμα 5

Αν η ορίζουσα του πίνακα A διάστασης 8×8 είναι ίση με -5, να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα $-A$.

Λύση:

$$det(-A) = det(-1 \cdot A) = (-1)^8 \cdot detA = detA = -5$$

Ιδιότητα 4

Κάθε στήλη του A είναι πολλαπλασιασμένη με (-1). Άρα αν βγάλω κοινό παράγοντα το (-1) από κάθε στήλη θα εμφανιστεί το (-1) οκτώ φορές! Γι’αυτό γράφουμε $(-1)^8$.