



# Γραμμική Άλγεβρα

## 2. Στοιχειώδεις Πράξεις Πινάκων

Κάλλια Παυλοπούλου

2021-2022

# Ηγετικό στοιχείο γραμμής (pivot)

Σε μια μη μηδενική γραμμή  
(γραμμή που δεν έχει όλα τα στοιχεία της 0),  
το ηγετικό στοιχείο της είναι το πρώτο μη μηδενικό (από αριστερά  
προς τα δεξιά).

$$\text{Π.χ. } A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -8 \\ 3 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Ηγετικό στοιχείο 1<sup>ης</sup> γραμμής

Ηγετικό στοιχείο 3<sup>ης</sup> γραμμής

Ηγετικό στοιχείο 2<sup>ης</sup> γραμμής

# Πίνακας κλιμακωτής μορφής

Κλιμακωτός ή κλιμακωτής μορφής (echelon form of a matrix), πίνακας  $A = [a_{ij}] \in M_{\mu \times \nu}$ , όταν ισχύουν:

A) Οι μηδενικές γραμμές, αν υπάρχουν, βρίσκονται στη σειρά μετά από τις μη μηδενικές γραμμές (**κάτω-κάτω**) και

B) το ηγετικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής βρίσκεται δεξιότερα από το ηγετικό στοιχείο της προηγούμενης της γραμμής.

Παραδείγματα:  $A = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & 0 & 1 & -2 \\ 0 & \mathbf{2} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$   $B = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{2} & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

# Πίνακας ανηγμένος κλιμακωτός ή ανηγμένης κλιμακωτής μορφής $A = [a_{ij}] \in M_{\mu \times \nu}$

(row reduced echelon form of a matrix), αν ισχύουν:

A) είναι κλιμακωτός

B) το ηγετικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι **1** και

Γ) σε μία στήλη που περιέχει το ηγετικό στοιχείο κάποιας γραμμής, όλα τα άλλα στοιχεία είναι 0.

$$\text{Π.χ. } \Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } \Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παραδείγματα πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 & 3 & 8 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 6 & 9 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Παρατηρήσεις:

- Κάθε πίνακας  $A = [a_{ij}] \in M_{\mu \times \nu}$  μπορεί να μετατραπεί σε πίνακα κλιμακωτής (echelon)  $A_E$  ή ανηγμένης κλιμακωτής (reduced echelon) μορφής  $A_R$  με τη βοήθεια των επόμενων στοιχειωδών πράξεων γραμμών.
- Προσοχή!
- Οι πίνακες  $A, A_E, A_R$  δεν είναι ίσοι αλλά γραμμοϊσοδύναμοι!

## Γραμμοπράξεις ή στοιχειώδεις πράξεις γραμμών στο $M_{\mu \times \nu}$

- Α) εναλλαγή της  $i$ - γραμμής με την  $k$ -γραμμή.

$$\gamma_i \leftrightarrow \gamma_k$$

- Β) πολλαπλασιασμός της  $i$ - γραμμής επί  $\lambda \neq 0$ .

$$\gamma_i \rightarrow \lambda \gamma_i, \lambda \neq 0$$

- Γ) αντικατάσταση της  $i$ - γραμμής από το άθροισμα αυτής και του  $\lambda$ -πλασίου της  $k$ -γραμμής.

$$\gamma_i \rightarrow \gamma_i + \lambda \gamma_k, \lambda \neq 0$$

- Πρόκειται δηλαδή για μία απεικόνιση από το σύνολο των πινάκων  $M_{\mu \times \nu}$  στο σύνολο των πινάκων  $M_{\mu \times \nu}$ .

$$\tau: M_{\mu \times \nu} \rightarrow M_{\mu \times \nu},$$

$$A \rightarrow \tau(A).$$

- Ο πίνακας  $\tau(A)$  που προκύπτει από τον  $A$  με εφαρμογή μιας ή περισσότερων από τις προηγούμενες διαδικασίες (τις γραμμοπράξεις) είναι **γραμμοϊσοδύναμος** με τον  $A$ .



## Παράδειγμα

$$\bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 + \gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \leftrightarrow \gamma_3}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - 3\gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow (-1) \cdot \gamma_3}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - 2 \cdot \gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 - 3 \cdot \gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 - 2 \cdot \gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Στηλοπράξεις ή στοιχειώδεις πράξεις στηλών στο $M_{\mu \times \nu}$

- Α) εναλλαγή της  $j$ -στήλης με την  $k$ -στήλη.

$$\sigma_j \leftrightarrow \sigma_k$$

- Β) πολλαπλασιασμός της  $j$ -στήλης επί  $\lambda \neq 0$ .

$$\sigma_j \rightarrow \lambda \sigma_j, \lambda \neq 0$$

- Γ) αντικατάσταση της  $j$ -στήλης από το άθροισμα αυτής και του  $\lambda$ -πλασίου της  $k$ -στήλης.

$$\sigma_j \rightarrow \sigma_j + \lambda \sigma_k, \lambda \neq 0$$

- Πρόκειται δηλαδή για μία απεικόνιση από το σύνολο των πινάκων  $M_{\mu \times \nu}$  στο σύνολο των πινάκων  $M_{\mu \times \nu}$ .

$$\sigma: M_{\mu \times \nu} \rightarrow M_{\mu \times \nu},$$

$$A \rightarrow \sigma(A).$$

## Στοιχειώδης πίνακας

- Σε κάθε στοιχειώδη πράξη γραμμών αντιστοιχίζουμε έναν στοιχειώδη πίνακα.
- Έτσι στη στοιχειώδη πράξη γραμμών  $\tau$  που εφαρμόζεται σε πίνακα  $A \in M_{\mu \times \nu}$  αντιστοιχίζουμε τον **στοιχειώδη πίνακα**  $\tau(I_\mu)$  που προκύπτει από την εφαρμογή της  $\tau$  στον μοναδιαίο πίνακα  $I_\mu$ .

## Παράδειγμα

1) Στη στοιχειώδη πράξη  $\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2$ , δηλ. εναλλαγή 1<sup>ης</sup> και 2<sup>ης</sup> γραμμής, στον  $I_3$  αντιστοιχεί ο πίνακας:

εναλλαγή 1<sup>ης</sup> και 2<sup>ης</sup> γραμμής  
στον μοναδιαίο πίνακα

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

η 3<sup>η</sup> γραμμή δεν αλλάζει

Εφαρμογή  $T_1$  σε πίνακα  $A \in M_{3 \times 3}$  (πολλαπλασιασμός από αριστερά)

$$T_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} =$$

εναλλαγή 1<sup>ης</sup> και 2<sup>ης</sup>  
γραμμής στον μοναδιαίο

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

η 3<sup>η</sup> γραμμή δεν αλλάζει

εναλλαγή 1<sup>ης</sup> και 2<sup>ης</sup> γραμμής στον  
πίνακα  $A$

# Εφαρμογή $T_1$ σε πίνακα $B \in M_{3 \times 4}$

$$T_1 \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} =$$

εναλλαγή 1<sup>ης</sup> και 2<sup>ης</sup>  
γραμμής στον μοναδιαίο

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

εναλλαγή 1<sup>ης</sup> και 2<sup>ης</sup>  
γραμμής στον πίνακα  $B$

2) Στη στοιχειώδη πράξη  $\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 + 2\gamma_1$ , δηλ.

αντικατάσταση της 3<sup>ης</sup> γραμμής από το άθροισμα αυτής και

του 2-πλασίου της 1<sup>ης</sup> γραμμής, στον  $I_3$  αντιστοιχεί ο πίνακας:

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

η 1<sup>η</sup> γραμμή ίδια

η 2<sup>η</sup> γραμμή ίδια

στη θέση της 3<sup>ης</sup> γραμμής θα βάλουμε το  
άθροισμά της με το διπλάσιο της 1<sup>ης</sup> γραμμής



Εφαρμογή  $T_2$  σε πίνακα  $A \in \mathbf{M}_{3 \times 3}$  (πολλαπλασιασμός από αριστερά)

$$T_2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 7 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 8 & 2 \cdot 3 + 0 \cdot 6 + 1 \cdot 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

στη θέση της 3<sup>ης</sup> γραμμής θα βάλουμε το άθροισμά της με το διπλάσιο της 1<sup>ης</sup> γραμμής

Επεξήγηση πράξεων στην εφαρμογή  $T_2$  σε πίνακα  $A \in M_{3 \times 3}$  (πολλαπλασιασμός από αριστερά):

$$T_2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} =$$

Εκτελώ τον πολ/σμό πινάκων όπως τον έχουμε ορίσει στην παράγραφο 1. Για να βρω το στοιχείο  $a_{31}$  πολ/ζω τα στοιχεία 3<sup>ης</sup> γραμμής του  $T_2$  με τα στοιχεία της 1<sup>ης</sup> στήλης του  $A$ .

Για να βρω το στοιχείο  $a_{32}$  πολ/ζω τα στοιχεία 3<sup>ης</sup> γραμμής του  $T_2$  με τα στοιχεία της 2<sup>ης</sup> στήλης του  $A$ .

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 7 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 8 & 2 \cdot 3 + 0 \cdot 6 + 1 \cdot 9 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

Για να βρω το στοιχείο  $a_{33}$  πολ/ζω τα στοιχεία 3<sup>ης</sup> γραμμής του  $T_2$  με τα στοιχεία της 3<sup>ης</sup> στήλης του  $A$ .

Τελικά η 3<sup>η</sup> γραμμή είναι το άθροισμα των στοιχείων της 3<sup>ης</sup> γραμμής και του 2-πλασίου της 1<sup>ης</sup> γραμμής.

Ομοίως, ορίζουμε στοιχειώδεις πίνακες στηλών  $\sigma(I_n)$

1) Στη στοιχειώδη πράξη  $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$ , δηλ. εναλλαγή 1<sup>ης</sup> και 2<sup>ης</sup> στήλης, στον  $I_3$  αντιστοιχεί ο πίνακας:

εναλλαγή 1<sup>ης</sup> και 2<sup>ης</sup> στήλης

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

η 3<sup>η</sup> στήλη ίδια

# Εφαρμογή $\Sigma_1$ σε πίνακα $A \in M_{3 \times 3}$ (πολ/σμός από δεξιά)

$$A \cdot \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

εναλλαγή 1<sup>ης</sup> και 2<sup>ης</sup> στήλης στον μοναδιαίο

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

εναλλαγή 1<sup>ης</sup> και 2<sup>ης</sup> στήλης στον πίνακα  $A$

2) Στη στοιχειώδη πράξη  $\sigma_2 \leftrightarrow 3\sigma_2$ , δηλ. αντικατάσταση της 2<sup>ης</sup> στήλης από το 3-πλάσιό της, στον  $I_4$  αντιστοιχεί ο πίνακας:

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Στη θέση της 2<sup>ης</sup> στήλης θα βάλουμε το τριπλάσιό της

Οι υπόλοιπες στήλες ίδιες

Εφαρμογή του  $\Sigma_2$  (πολλαπλασιασμός από δεξιά) σε πίνακα  $\Gamma \in M_{4 \times 4}$

$$\Gamma \cdot \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

Στη θέση της 2<sup>ης</sup> στήλης  
βάλουμε το τριπλάσιό της  
στον μοναδιαίο

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot 3 & 3 & 4 \\ 5 & 6 \cdot 3 & 7 & 8 \\ 9 & 10 \cdot 3 & 11 & 12 \\ 13 & 14 \cdot 3 & 15 & 16 \end{bmatrix} = \dots$$

Στη θέση της 2<sup>ης</sup> στήλης θα βάλουμε το  
τριπλάσιό της στον πίνακα  $\Gamma$

Εφαρμογή του  $\Sigma_2$  σε πίνακα  $B \in M_{3 \times 4}$

$$B \cdot \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot 3 & 3 & 4 \\ 5 & 6 \cdot 3 & 7 & 8 \\ 9 & 10 \cdot 3 & 11 & 12 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 & 4 \\ 5 & 18 & 7 & 8 \\ 9 & 30 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

## Πρόταση:

(α) Αν  $\tau: M_{\mu \times \nu} \rightarrow M_{\mu \times \nu}$ , είναι μια στοιχειώδης πράξη γραμμών και  $A = [\alpha_{ij}] \in M_{\mu \times \nu}$ , τότε

$$A \rightarrow \tau(A) = \tau(I_{\mu}) \cdot A$$

(β) Αν  $\sigma: M_{\mu \times \nu} \rightarrow M_{\mu \times \nu}$ , είναι μια στοιχειώδης πράξη στηλών και  $A = [\alpha_{ij}] \in M_{\mu \times \nu}$ , τότε

$$A \rightarrow \sigma(A) = A \cdot \sigma(I_{\nu})$$