ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

Γραμμική Άλγεβρα
1β. Πίνακες και Βασικές Πράξεις (συνέχεια)

Κάλλια Παυλοπούλου

2021-2022

Πολλαπλασιασμός πινάκων

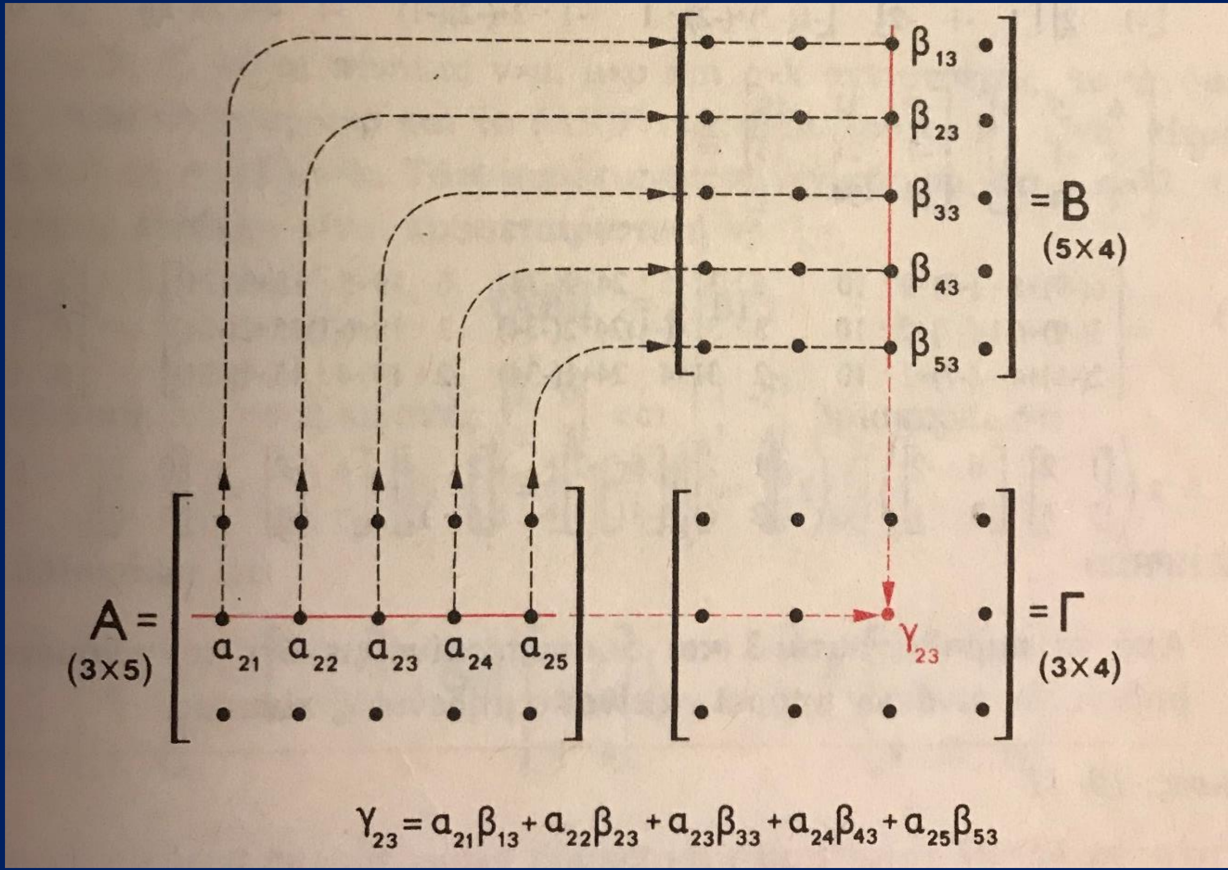
Παράδειγμα πινάκων $[3 \times 5] \cdot [5 \times 4]$

Το γινόμενο

ενός πίνακα $A = [\alpha_{ij}]$ τύπου 3×5

με τον πίνακα $B = [\beta_{jk}]$ τύπου 5×4

είναι ο πίνακας $\Gamma = [\gamma_{ik}]$ τύπου 3×4



Παράδειγμα πολλαπλασιασμού πινάκων $[2 \times 3] \cdot [3 \times 3]$

Προσοχή! Δεν μπορώ να πολλαπλασιάσω πίνακες οποιασδήποτε μορφής. Για να πολλαπλασιαστούν δύο πίνακες πρέπει να είναι της μορφής: $A_{\mu\times\rho} \cdot B_{\rho\times\nu}$

2×3 $\qquad$ 3×2 $\qquad$ 2×2

- $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} = 1(-1) + 2\cdot 0 + 3\cdot 2 & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} = 4(-1) + 5\cdot 0 + 6\cdot 2 & \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$

Για να υπολογίσω το στοιχείο γ_{21} πολλαπλασιάζω τα στοιχεία της 2ης γραμμής του πίνακα A με τα αντίστοιχα στοιχεία της 1ης στήλης του πίνακα B.

Πρακτική σημασία του πολλαπλασιασμού πινάκων
Παράδειγμα 1

Για την κατασκευή **δύο ειδών γλυκισμάτων Γ_1 και Γ_2** χρειαζόμαστε τα **υλικά σε kg** που φαίνονται στον παρακάτω 2 x 3 πίνακα:

$$\begin{array}{cccc} \text{Αλεύρι} & \text{Ζάχαρη} & \text{Βούτυρο} & \\ \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1{,}2 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 1{,}4 & 0{,}8 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \Gamma_1 \ \text{γλύκισμα} \\ \Gamma_2 \ \text{γλύκισμα} \end{array}$$

Το **κόστος** σε δρχ. των υλικών αυτών ανά κιλό, για τα έτη 1992 και 1993, είναι όπως δείχνει ο παρακάτω 3 x 2 πίνακας:

$$\begin{array}{ccc} & 1992 & 1993 \end{array}$$

$$B = \begin{bmatrix} 160 & 180 \\ 170 & 200 \\ 900 & 1200 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{αλεύρι} \\ \text{ζάχαρη} \\ \text{βούτυρο} \end{array}$$

Για να βρούμε **το κόστος σε δραχμές των υλικών του γλυκίσματος Γ_1**, πολλαπλασιάζουμε τις ποσότητες των υλικών με τις αντίστοιχες τιμές και προσθέτουμε τα γινόμενα αυτά.
Δηλαδή, το κόστος του Γ_1 το 1992 ήταν **1,2 • 160 + 0,6 • 170 + 0,3 • 900 = 564**

Η παραπάνω διαδικασία περιγράφεται με τη **βοήθεια των πινάκων** ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 1{,}2 & 0{,}6 & 0{,}3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 160 \\ 170 \\ 900 \end{bmatrix} = [1{,}2 \cdot 160 + 0{,}6 \cdot 170 + 0{,}3 \cdot 900] = [564].$$

Ο πίνακας 1x1 [564] λέγεται γινόμενο της πρώτης γραμμής του Α επί την πρώτη στήλη του Β.

Πρακτική σημασία του πολλαπλασιασμού πινάκων
Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

Ανάλογα, **το κόστος του $Γ_1$ το 1993** ήταν 1,2 • 180 + 0,6 • 200 + 0,3 • 1200 = 696

Δηλαδή παριστάνεται με το γινόμενο της πρώτης γραμμής του Α επί την δεύτερη στήλη του Β

$$[1{,}2 \quad 0{,}6 \quad 0{,}3]\begin{bmatrix}180\\200\\1200\end{bmatrix}=[696].$$

Ομοίως, **το κόστος του $Γ_2$ το 1992** ήταν: 1,4 • 160 + 0,8 • 170 + 0,4 • 900 = 720
ή σε μορφή πινάκων

$$[1{,}4 \quad 0{,}8 \quad 0{,}4]\begin{bmatrix}160\\170\\900\end{bmatrix}=[720].$$

ενώ **το 1993** ήταν: 1,4 • 180 + 0,8 • 200 + 0,4 • 1200 = 892 ή

$$[1{,}4 \quad 0{,}8 \quad 0{,}4]\begin{bmatrix}180\\200\\1200\end{bmatrix}=[892].$$

Πρακτική σημασία του πολλαπλασιασμού πινάκων
Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

Άρα, τελικά ο πίνακας Γ δείχνει **το κόστος των δύο γλυκισμάτων κατά τα έτη 1992 και 1993**

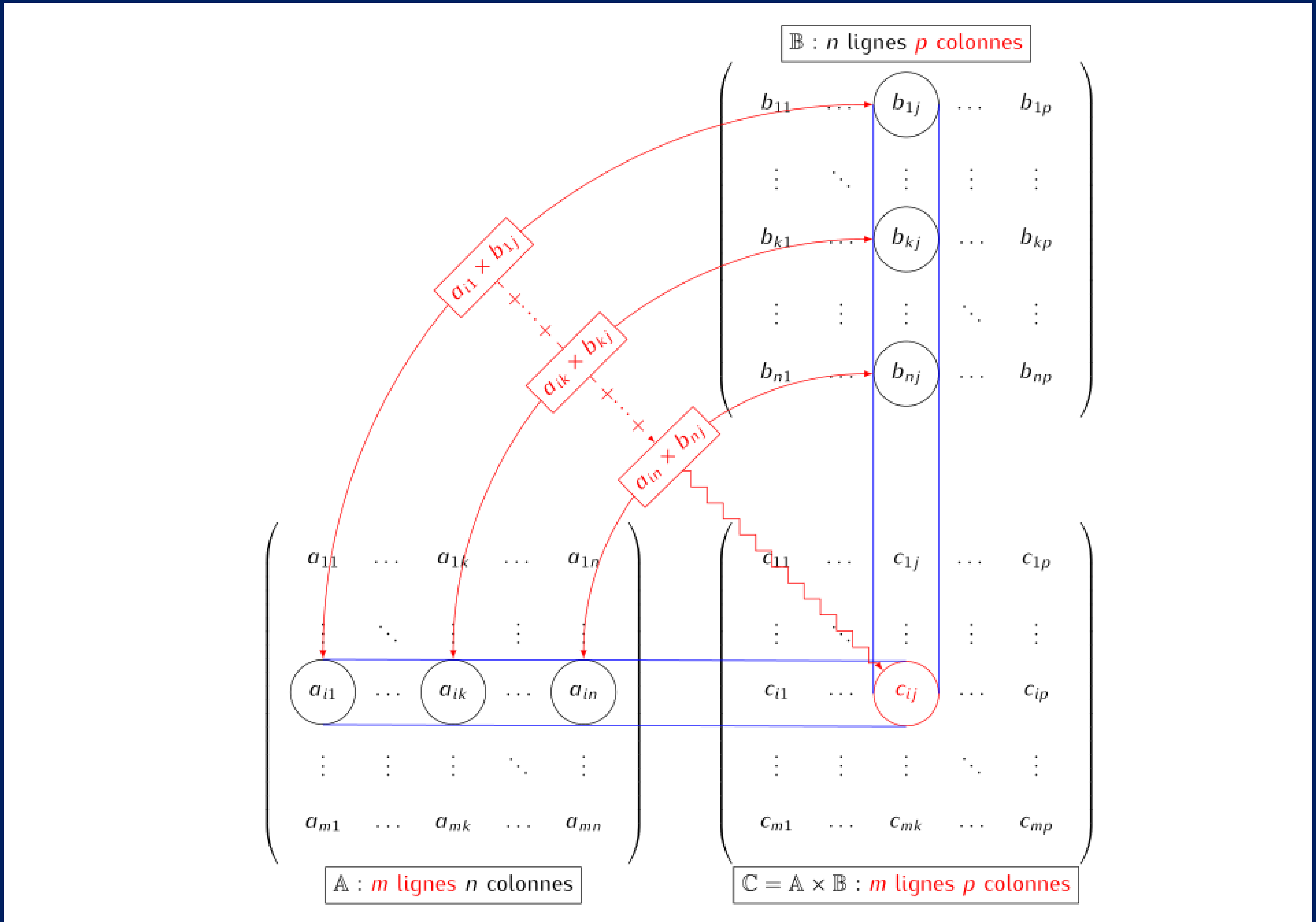
$$\Gamma = \begin{bmatrix} 564 & 696 \\ 720 & 892 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας Γ που προκύπτει με τον πιο πάνω τρόπο λέγεται **γινόμενο του πίνακα Α με τον πίνακα Β** και συμβολίζεται με **Α • Β** ή **ΑΒ** , δηλαδή

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1{,}2 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 1{,}4 & 0{,}8 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 160 & 180 \\ 170 & 200 \\ 900 & 1200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 564 & 696 \\ 720 & 892 \end{bmatrix}.$$

Από τα Μαθηματικά (Γ Λυκείου Θετικών Σπουδών / Οικονομίας & Πληροφορικής)- Βιβλίο Μαθητή, §1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ, http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2732/Mathimatika-G-Lykeiou-ThSp_html-apli/indexA1_3.html

Αναπαράσταση πολλαπλασιασμού πινάκων



[Gloria Faccanoni, Algèbre linéaire , Recueil d’exercices corrigés et aide-mémoire, Univesité du Sud Toulon-Var, France 2014.]

Πολλαπλασιασμός πινάκων

Γινόμενο του πίνακα $A = [\alpha_{ik}]$ τύπου $\mu \times \rho$

με τον πίνακα $B = [\beta_{kj}]$ τύπου $\rho \times \nu$

λέγεται ο πίνακας $\Gamma = [\gamma_{ij}]$ ο οποίος είναι τύπου $\mu \times \nu$ και

κάθε στοιχείο του είναι το άθροισμα των γινομένων των ρ στοιχείων της i-γραμμής του A με τα αντίστοιχα ρ στοιχεία της j -στήλης του B.

Συγκεκριμένα έχουμε:

$$\boldsymbol{\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \cdots + \alpha_{i\rho}\beta_{\rho j} = \sum_{k=1}^{\rho} \alpha_{ik}\beta_{kj}}$$

Άθροισμα για k από 1 έως ρ

Παρατηρήσεις

1) Αν ορίζεται το γινόμενο $A \cdot B$ δεν ορίζεται αναγκαστικά το γινόμενο $B \cdot A$.

Π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, το αποτέλεσμα $A \cdot B$ είναι διάστασης 1×2,

ενώ το γινόμενο $B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}$ δεν πραγματοποιείται!

2) Ακόμη κι αν ορίζονται τα γινόμενα $A \cdot B$ και $B \cdot A$ τότε δεν ισχύει πάντα $A \cdot B = B \cdot A$. Π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$,

τότε $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix}$, διάστασης 1×1

ενώ $B \cdot A = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 = 4 & 4 \cdot 4 = 16 \\ 1 \cdot 1 = 1 & 1 \cdot 4 = 4 \end{bmatrix}$, διάστασης 2×2!

Άρα γενικά (ακόμα κι αν οι πίνακες είναι τετραγωνικοί της ίδιας διάστασης) ισχύει $A \cdot B \neq B \cdot A$

Προσοχή!

- Στη θεωρία των πινάκων δεν αληθεύει πάντα η συνεπαγωγή

$$\text{Αν } \boldsymbol{A\cdot B = O}, \text{ τότε } \boldsymbol{A = O} \text{ ή } \boldsymbol{B = O}$$

- Δηλαδή, μπορεί να ισχύει $\boldsymbol{A\cdot B = O}$ με $\boldsymbol{A \neq O}$ και $\boldsymbol{B \neq O}$

Παραδείγμα: Για $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathrm{O}$ $και$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathrm{O}$ ισχύει ότι

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{O}. \text{ Άρα } A\cdot B = O.$$

Εξάσκηση : Να υπολογίσετε το γινόμενο των πινάκων $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ και $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

- Κατά συνέπεια, ΔΕΝ ισχύει πάντα η συνεπαγωγή:

$$A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow B = C$$

- Αν όμως ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος (θα το δούμε στη συνέχεια) τότε ισχύει

$$A \cdot B = \boldsymbol{0} \Rightarrow B = \boldsymbol{0}$$

Γενικά στην απαλοιφή πινάκων πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί

Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού Πινάκων

- Προσεταιριστική ιδιότητα:

$A \cdot (B \cdot \Gamma) = (A \cdot B) \cdot \Gamma$, για πίνακες $A \in \Pi_{\mu \times \rho}, B \in \Pi_{\rho \times \nu}$, $\Gamma \in \Pi_{\nu \times \kappa}$

- Επιμεριστική ιδιότητα:
- Για πίνακες κατάλληλου τύπου ισχύει

$$A \cdot (B + \Gamma) = A \cdot B + A \cdot \Gamma$$

και $(A + B) \cdot \Gamma = A \cdot \Gamma + B \cdot \Gamma$

- Αντιμεταθετική: Γενικά δεν ισχύει!

Ο μοναδιαίος ή ταυτοτικός πίνακας $\boldsymbol{I_\nu} \in \boldsymbol{\Pi_\nu}$

$$\mathrm{I}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$ είναι διαγώνιος πίνακας και έχει τις ιδιότητες:

- $A \cdot I_\nu = I_\nu \cdot A = A, \forall A \in \Pi_\nu$
- $B \cdot I_\nu = B, \forall B \in \Pi_{\mu \times \nu}$
- $I_\nu \cdot C = C, \forall C \in \Pi_{\nu \times \rho}$
- $I_\nu = [\delta_{ij}]_{\nu x \nu}$, όπου $\delta_{ij} = \delta(i,j) = \begin{cases} 1, \alpha\nu\ i = j \\ 0, \alpha\nu\ i \neq j \end{cases}$ είναι η συνάρτηση δέλτα του Kronecker.

Ο ανάστροφος πίνακας ενός πίνακα $\boldsymbol{A}$ τύπου $\boldsymbol{\mu \times \nu}$

Αν A είναι ένας $\mu \times \nu$ πίνακας, $A = [\alpha_{ij}] \in \Pi_{\mu\times\nu}$, τότε ο **ανάστροφος** πίνακας (transpose matrix) του A συμβολίζεται με $\boldsymbol{A^T}$ ή A^t και είναι ο πίνακας που έχει για γραμμές τις στήλες και για στήλες τις γραμμές του A με την ίδια σειρά, δηλαδή

$$\boxed{A^T = [\alpha_{ji}] \in \Pi_{\nu\times\mu}}$$

- Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = [\alpha_{ij}] \in \Pi_{\nu}$ λέγεται
- **Συμμετρικός** (symmetric matrix), αν ισχύει: $\boxed{\boldsymbol{A^T = A}}$, δηλ.
- **Αντισυμμετρικός** (antisymmetric matrix), αν ισχύει: $\boxed{\boldsymbol{A^T = -A}}$.

Παραδείγματα:

- $A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{matrix}} \end{bmatrix}$, ο ανάστροφός του είναι ο $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$.

- $B = \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}}$, ο ανάστροφός του είναι ο $B^T = \boxed{[1 \quad -2 \quad 3].}$

Παραδείγματα:

- Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ είναι συμμετρικός ($A^T = A$).

- Ο πίνακας $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ είναι αντισυμμετρικός ($B^T = -B$).

Τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου είναι όλα μηδέν!

Δεν είναι τυχαίο:

Σε κάθε αντισυμμετρικό πίνακα, ισχύει: $\forall i, j = 1, 2, \dots, \nu\ , \alpha_{ji} = -\alpha_{ij}$

Για $i = j, \varepsilon\chi o\upsilon\mu\varepsilon\ \ \alpha_{ii} = -\alpha_{ii} \Leftrightarrow \alpha_{ii} + \alpha_{ii} = 0 \Leftrightarrow 2\alpha_{ii} = 0 \Leftrightarrow \alpha_{ii} = 0$

Άρα, για $i = j$ **προκύπτει ότι:** $\boxed{\alpha_{ii} = 0, \forall\ i = 1, 2, \dots, \nu.}$

Ιδιότητες Ανάστροφου πίνακα:

1) $(A+B)^T = A^T + B^T, \forall A, B \in \Pi_{\mu\times\nu}$

2) $(\lambda A)^T = \lambda A^T, \forall A \in \Pi_{\mu\times\nu}, \forall \lambda \in R$

3) $(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T, \forall A \in \Pi_{\mu\times\rho}, \forall B \in \Pi_{\rho\times\nu}$

4) $I_\nu^T = I_\nu$

5) $(A^T)^T = A, \forall A \in \Pi_{\mu\times\nu}$