Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

10ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου

Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών (υπενθύμιση).

Θεωρούμε ότι η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ συγκλίνει για όλα τα x μέσα σε ένα ανοικτό διάστημα I. Τότε η δυναμοσειρά είναι παραγωγίσιμη σε όλο το I και ισχύει

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x-c)^{n-1} \quad x \in I.$$

Με άλλα λόγια μπορούμε να παραγωγίσουμε τη δυναμοσειρά **όρο προς όρο**

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n\right)' &= \big(a_0 + a_1 \cdot (x-c) + a_2 \cdot (x-c)^2 + \cdots + a_n \cdot (x-c)^n + \dots\big)' \\ &= a_1 + 2a_2 \cdot (x-c) + \cdots + na_n \cdot (x-c)^{n-1} + \dots \qquad x \in I.\end{aligned}$$

Άσκηση 1 (Ερωτήσεις Κατανόησης)**.** Απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις με αιτιολόγηση.

(i) Αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι δυναμοσειρά και το I είναι ανοικτό διάστημα τότε η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο I. Σωστό ή Λάθος;

(ii) Οι δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ και $\sum_{n=1339}^{\infty} a_n \cdot x^n$ συγκλίνουν ακριβώς για τα ίδια $x \in \mathbb{R}$ και συνεπώς έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης. Σωστό ή Λάθος;

(iii) Αν δύο δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης θα συγκλίνουν απαραίτητα για τα ίδια $x \in \mathbb{R}$;

(iv) Αν μια δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x σε ένα διάστημα I με άκρα τους αριθμούς 3 και 8, αλλά δεν συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, ποιο είναι το κέντρο της δυναμοσειράς και ποια η ακτίνα σύγκλισής της;

Άσκηση 2 (Αναγνώριση δυναμοσειράς)**.** Βρείτε το κέντρο c και τους συντελεστές $a_n, n \in \mathbb{N}$ στις ακόλουθες δυναμοσειρές.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x-1)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (7x-1)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (5x+3)^n.$$

Άσκηση 3 (Εύρεση διαστήματος σύγκλισης)**.**

(i) Για κάθε δυναμοσειρά της Άσκησης 2 βρείτε το σύνολων όλων των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά συγκλίνει.

(ii) Επαναλάβετε το ίδιο για τις ακόλουθες δυναμοσειρές.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}}$$

Άσκηση 4 (Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά). Δίνεται ότι

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x|<1 \quad \text{και} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Γράψτε τις ακόλουθες συναρτήσεις σε μορφή δυναμοσειράς σε κατάλληλα επιλεγμένα ανοικτά διαστήματα I:¨

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x} \quad x \neq -1, \qquad f_2(x) = \frac{1}{3-x} \quad x \neq 3,$$

$$f_3(x) = \frac{x}{2+5x} \quad x \neq -\frac{2}{5}\,, \qquad f_4(x) = x \cdot \sin(x^2) \quad x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Έστω $x \neq 0$. Εκφράστε την παράσταση $x \cdot \sin(1/x)$ σε μορφή σειράς.

Άσκηση 5 (Ανάπτυξη σε Δυναμοσειρά). Δίνεται ότι

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x|<1 \quad \text{και} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Γράψτε τις ακόλουθες συναρτήσεις σε δυναμοσειρά σε κατάλληλα επιλεγμένα ανοικτά διαστήματα.

$$g_1(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad x \neq -1, \qquad g_2(x) = \frac{1}{(1-x)^3} \quad x \neq 1,$$

$$g_3(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \quad x \in \mathbb{R}, \qquad g_4(x) = \cos(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 6. Βρείτε το λάθος στον ακόλουθο συλλογισμό.

Δίνεται η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$. Θέλουμε να βρούμε την παράγωγό της.

Για ευκολία γράφουμε τη δυναμοσειρά αναλυτικά ως άπειρο άθροισμα

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} - \ldots.$$

Έπειτα παραγωγίζουμε όρο προς όρο (Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών):

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n \cdot (2n+1)}{(2n+1)!} \cdot x^{2n} - \ldots \\ (1) \qquad &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} - \ldots. \end{aligned}$$

Από την άλλη μπορούμε να παραγωγίσουμε κατευθείαν σύμφωνα με τον τύπο που μας δίνεται στο Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών, προσέχοντας να ξεκινήσουμε το άθροισμα από $n=1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n+1)}{(2n+1)!} \cdot x^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} \\ (2) \qquad &= -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} - \ldots. \end{aligned}$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε **δύο διαφορετικές εκφράσεις** για την παράγωγο $f'(x)$. (!)

Αυτές οι εκφράσεις είναι όντως διαφορετικές γιατί για $x=0$ η (1) δίνει την τιμή 1 ενώ η (2) την τιμή 0.

Μπορούμε επίσης να δούμε ότι οι (1) και (2) διαφέρουν αφαιρώντας την δεύτερη από την πρώτη και βλέποντας ότι η διαφορά τους είναι ίση με 1.

Άσκηση 7 (Δυναμοσειρά Εκθετικής συνάρτησης)**.** Δίνεται η δυναμοσειρά
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \, .$$

(i) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

(ii) Βρείτε την παράγωγο f'. Τι παρατηρείτε;

(iii) Δείξτε ότι $f(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **Υπόδειξη:** Θεωρήστε τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 8 (Παράγωγοι ημιτόνου κάθε τάξης)**.** Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sin^{(4n)}(x) = \sin(x), \quad \sin^{(4n+1)}(x) = \cos(x), \quad \sin^{(4n+2)}(x) = -\sin(x), \quad \sin^{(4n+3)}(x) = -\cos(x), \tag{3}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $f^{(m)}(x)$ είναι η παράγωγος της f τάξης $m \in \mathbb{N}$. (Με $f^{(0)}$ εννοούμε την f.) Συμπεράνετε ότι

$$\sin^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^j, & k = 2j+1 \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2j \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4}$$

⊣

Άσκηση 9 (Παράγωγοι συνημιτόνου κάθε τάξης)**.** Διατυπώστε και αποδείξτε τις αντίστοιχες με την Άσκηση 8 ισότητες για τη συνάρτηση του συνημιτόνου cos.

⊣