Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

9ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου

Δεδομένα. Θεωρούμε γνωστούς τους κανόνες

$$\infty + x = x + \infty = \infty \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
$$-\infty + x = x - \infty = -\infty \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
$$\infty \cdot x = x \cdot \infty = \infty \quad \text{για κάθε } x > 0$$
$$\infty \cdot x = x \cdot \infty = -\infty \quad \text{για κάθε } x < 0$$
$$(-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty) = -\infty \quad \text{για κάθε } x > 0$$
$$(-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty) = \infty \quad \text{για κάθε } x < 0$$

όπως επίσης και **όλους τους υπόλοιπους κανόνες** πράξεων με το άπειρο που έχουν αναφερθεί στις διαφάνειες.

Θεωρούμε ακόμα γνωστά τα εξής: α) για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ θετικών πραγματικών αριθμών έχουμε

$$x_n \to \infty \iff \frac{1}{x_n} \to 0.$$

(Η απόδειξη αυτού γίνεται με βάση τον ορισμό της σύγκλισης). Όμοια β) για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ αρνητικών πραγματικών αριθμών έχουμε

$$x_n \to -\infty \iff \frac{1}{x_n} \to 0.$$

Με βάση αυτά και την Αρχή Μεταφοράς για τα όρια έχουμε $\lim_{x\to\infty} 1/x = \lim_{x\to-\infty} 1/x = 0$.

Για τις ανάγκες του φυλλαδίου θεωρούμε γνωστή την εκθετική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = e^x$. Η f είναι συνεχής, διαφορίσιμη με $f' = f$, θετική και γνησίως αύξουσα με $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Θα δώσουμε τον αυστηρό ορισμό της εκθετικής συνάρτησης στο επόμενο μάθημα.

Άσκηση 1.

(i) Δείξτε ότι $\lim_{x\to\infty}(x^3 - 3x^2 + 1) = \infty$.

Υπόδειξη: Γράψτε το πολυώνυμο ως γινόμενο $x^3 \cdot (1 - 3/x + 1/x^3)$.

(ii) Γενικότερα δείξτε ότι αν $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ τότε

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } a_k > 0, \\ -\infty, & \text{αν } a_k < 0. \end{cases}$$

(iii) Αν $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ και ο k είναι θετικός άρτιος τότε

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } a_k > 0, \\ -\infty, & \text{αν } a_k < 0. \end{cases}$$

(iv) Αν $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ και ο k είναι περιττός τότε

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } a_k < 0, \\ -\infty, & \text{αν } a_k > 0. \end{cases}$$

Άσκηση 2 (Κανόνας de L' Hospital)**.** Υπολογίστε τα ακόλουθα όρια.

$$\ell_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{5x^2 + 4x}$$

$$\ell_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 + 1}$$

$$\ell_3 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\ell_4 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$$

Άσκηση 3 (Κριτήριο Παρεμβολής για όρια συναρτήσεων)**.** Έστω I ένα διάστημα και $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ που είναι άκρο του I ή ανήκει στο I. Αν οι συναρτήσεις $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ ικανοποιούν

$$f(x) \le h(x) \le g(x), \quad \text{για κάθε } x \in I$$

και αν $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \ell$, δείξτε ότι $\lim_{x\to c} h(x) = \ell$.

Υπόδειξη. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το Κριτήριο Παρεμβολής για ακολουθίες.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{για κάθε } x \in (-1,1) \text{ και } \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 5 (Ιδιάζουσες Συναρτήσεις)**.** Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

και

$$f_2(x) = x \cdot f_1(x), \quad f_3(x) = x^2 \cdot f_1(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Δείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 0} f_1(x)$.

Υπόδειξη. Βρείτε δύο κατάλληλες ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ που συγκλίνουν στο 0 με $x_n, y_n \neq 0$ για κάθε $n \ge 1$.

(ii) Δείξτε ότι η συνάρτηση f_2 είναι συνεχής στο 0, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Υπόδειξη. Για την μη παραγωγισιμότητα θεωρήστε το λόγο $\dfrac{f_2(x) - f_2(x)}{x - 0}$ για $x \neq 0$.

(iii) Δείξτε ότι η συνάρτηση f_2 είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγος f_2' δίνεται ως εξής:

$$f_2'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin(1/x) - \cos(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Είναι η f_2' συνεχής;

Υπόδειξη. Στα $x \neq 0$ μπορείτε να παραγωγίσετε την f_2 με τον συνήθη τρόπο.

Άσκηση 6 (Αδυναμία εφαρμογής του Κανόνα de L' Hospital)**.**

(i) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (0,1) \to \mathbb{R} : f(x) = x + 1$ και $g(x) = x$. Δείξτε ότι τα όρια $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$, $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ διαφέρουν. Γιατί αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με τον Κανόνα de L' Hospital;

(ii) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x + \sin x$ και $g(x) = x$. Δείξτε ότι το όριο $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ είναι πραγματικός αριθμός αλλά δεν υπάρχει το όριο της f'/g' ούτε είναι $\pm\infty$ όταν το x τείνει στο ∞. (Επομένως δεν εφαρμόζεται ο Κανόνας de L' Hospital.)