Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

8ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου

Αρχή Μεταφοράς (υπενθύμιση): Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in A$ και $f : A \to \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) Η f είναι συνεχής στο x.

(2) Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ από στοιχεία του A με την ιδιότητα $x_n \to x$ ισχύει $f(x_n) \to f(x)$.

Άσκηση 1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x > 3 \\ -x, & x \leq 3. \end{cases}$$

Δείξτε τα εξής:

(i) Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο 3.

(ii) Για κάθε $x \neq 3$ η f είναι συνεχής στο x.

Άσκηση 2. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$ δεν έχει συνεχή επέκταση στο 0, δηλαδή για κάθε συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $F(x) = f(x) = 1/x$ για κάθε $x \neq 0$, η F δεν είναι συνεχής στο 0.

Άσκηση 3.

(i) Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ μια ακολουθία **από φυσικούς αριθμούς** η οποία συγκλίνει σε κάποιο a. Δείξτε ότι υπάρχει n_0 έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $x_n = a$, δηλαδή $x_n = a$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.
Υπόδειξη: Θεωρήστε τις αποστάσεις $|x_{n+1} - x_n|$.

(ii) Δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

Άσκηση 4.

(i) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : h(x) = \sqrt{|\sin x|}.$$

Βρείτε δύο συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ και $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε $h = g \circ f$.

(ii) Δείξτε ότι αν οι συναρτήσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ είναι συνεχείς τότε και η συνάρτηση $h = g \circ f$ είναι επίσης συνεχής, όπου τα X, Y και Z είναι μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Άσκηση 5. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχουν ακολουθίες $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ από ρητούς και από άρρητους αριθμούς αντίστοιχα έτσι ώστε $q_n \to x$ και $x_n \to x$.

Υπόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε $a < b$ υπάρχει ρητός q και άρρητος y με $a < q < b$ και $a < y < b$.

Σχόλιο: Στα συνηθισμένα παραδείγματα μια συνάρτηση είναι συνεχής “σχεδόν σε όλα τα σημεία” του πεδίου ορισμού της. Υπάρχουν όμως συναρτήσεις με “πάρα πολλά” σημεία ασυνέχειας.

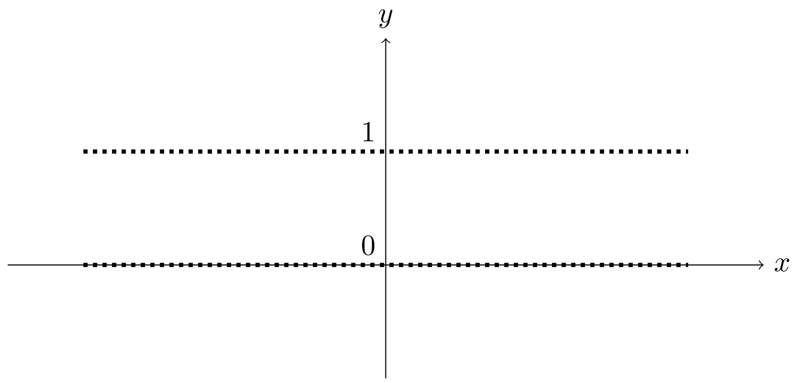
Άσκηση 6 (Συνάρτηση Dirichlet)**.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η f δεν έχει κανένα σημείο συνέχειας!

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 5.

Τη γραφική παράσταση της συνάρτησης Dirichlet μπορούμε να τη σχεδιάσουμε μόνο κατά προσέγγιση.



Άσκηση 7. Δείξτε ότι η εξίσωση $\cos(x^2) = x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0, \pi/2)$.