# 5ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου

**Άσκηση 1** (Χρήση του συμβολισμού $\Sigma$)**.** Συμπληρώστε τα πιο κάτω κενά.

$$17 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{\dots}^{\dots} \ \dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{\dots}^{\dots} \ \dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{\dots} a_{\dots}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \text{όπου } a, b \neq 0 \text{ και } n \in \mathbb{N}^*.$$

**Άσκηση 2** (Φθίνουσα κάτω φραγμένη ακολουθία και σύγκλιση)**.** Δείξτε από τα αξιώματα του μαθήματος ότι κάθε φθίνουσα κάτω φραγμένη ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ συγκλίνει.

**Υπόδειξη:** Θεωρήστε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με $a_n = -b_n$ για κάθε $n \geq 1$.

**Άσκηση 3** (Κριτήρια Λόγου - Ρίζας)**.** Δείξτε ότι οι πιο κάτω ακολουθίες συγκλίνουν στο $0$.

$$a_n = \frac{n^3}{3^n}, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}, \quad n \geq 1,$$

$$c_n = \left(\frac{3n^2+n+1}{7n^4+1}\right)^n \quad n \geq 1,$$

$$d_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \quad n \geq 1.$$

**Υπόδειξη:** Για τη δεύτερη και την τέταρτη ακολουθία θυμίζουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e \in (2,3)$.

**Άσκηση 4** (Αναδρομικά ορισμένη ακολουθία και σύγκλιση)**.** Ορίζουμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με αναδρομή ως εξής:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \quad n \geq 1.$$

Δείξτε ότι

(i) $0 < a_n < 2$ για κάθε $n \geq 1$.

(ii) $a_n < a_{n+1}$ για κάθε $n \geq 1$.

(iii) $a_n \to \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

**Υπόδειξη.** Στα (i) και (ii) χρησιμοποιείστε την Αρχή της Επαγωγής.

**Άσκηση 5** (Αναδρομικά ορισμένη ακολουθία και σύγκλιση)**.** Ορίζουμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με αναδρομή ως εξής:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 6 \cdot \frac{1+a_n}{7+a_n} \quad n \geq 1.$$

Δείξτε ότι

(i) $1 \leq a_n \leq 2$ για κάθε $n \geq 1$.

**Υπόδειξη.** Χρησιμοποιείστε την Αρχή της Επαγωγής. Μπορείτε να αναδιατυπώσετε τις ζητούμενες ανισότητες $1 \leq a_{n+1} \leq 2$ σε πιο απλές ισοδύναμες ανισότητες.

(ii) $a_{n+1} \geq a_n$ για κάθε $n \geq 1$.

(iii) $a_n \to 2$.

**Άσκηση 6** (Ακολουθίες με μεταβλητό πλήθος προσθετέων)**.** Θεωρούμε την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} .$$

Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει:

(i) $x_{n+1} - x_n > 0$,

(ii) $x_n < 1$.

Τι συμπεραίνετε για την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$; (Μην επιχειρήσετε να υπολογίσετε κάποιο όριο.)

**Άσκηση 7** (Η ακολουθία του αριθμού $e$)**.** Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1.$

(i) Δείξτε ότι

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \qquad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

(ii) Δείξτε ότι $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$. **Υπόδειξη:** Χρησιμοποιείστε το (i) και την ανισότητα Bernoulli.

(iii) Υπολογίστε τα όρια των πιο κάτω ακολουθιών:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

**Υπόδειξη:** Εκφράστε τις πιο πάνω ακολουθίες με τη βοήθεια της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.