Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

2ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου

Άσκηση 1 (Διωνυμικό Ανάπτυγμα)**.**

(i) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \geq 1$ έχουμε

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot x + \cdots + \binom{n}{n-1} \cdot x^{n-1} + x^n$$

(ii) Υπολογίστε τον αριθμό

$$a = 1 + \binom{5}{1} \cdot (-2) + \binom{5}{2} \cdot (-2)^2 + \cdots + \binom{5}{4} \cdot (-2)^4 + (-2)^5.$$

(iii) Δείξτε ότι για κάθε $x > -1$ ισχύει

$$1 + \binom{7}{1} \cdot x + \binom{7}{2} \cdot x^2 + \cdots + \binom{7}{6} \cdot x^6 + x^7 \geq 7x + 1.$$

Υπόδειξη για το (iii). Χρησιμοποιήστε την ανισότητα Bernoulli.

Άσκηση 2. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{n \in \mathbb{N} \mid (n-3) \cdot (n+2) \cdot (n+4) > 0\}$ είναι μη κενό και βρείτε το ελάχιστο στοιχείο του.

Άσκηση 3 (Αρχιμήδεια Ιδιότητα και Αρχή του Ελαχίστου)**.** Δείξτε τα εξής:

(i) Για κάθε $x \geq 0$ υπάρχει ο ελάχιστος φυσικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος του x.

(ii) Για κάθε $x \geq 0$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n με $n \leq x < n+1$.

(iii) Για κάθε $y < 0$ υπάρχει ένα $m \in \mathbb{Z}$ με $m \leq y < m+1$.

(iv) Συμπεράνετε ότι για κάθε $z \in \mathbb{R}$ υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ με $m \leq z < m+1$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε το σύνολο $A = \{k \in \mathbb{N} \mid k > x\}$.

Άσκηση 4 (Πυκνότητα ρητών στους πραγματικούς)**.** Σκοπός αυτής της άσκησης είναι να δείξουμε το εξής αποτέλεσμα που είναι γνωστό ως **πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς**:

Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $a < q < b$.

Δείχνουμε το παραπάνω με τα εξής βήματα. Δίνονται αρχικά $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$.

(i) Εξηγήστε γιατί υπάρχουν $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ και $m \in \mathbb{Z}$ με

$$n > \frac{1}{b-a} \quad \text{και} \quad m \leq n \cdot a + 1 < m+1.$$

(ii) Αν τα m, n είναι όπως στο (i) δείξτε ότι

$$a < \frac{m}{n} < b.$$

Σχόλιο: Είναι σαφές ότι το $q = \dfrac{m}{n}$ είναι ένας ρητός αριθμός που ικανοποιεί το ζητούμενο.

Άσκηση 5 (Πυκνότητα αρρήτων στους πραγματικούς)**.** Δείξτε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ υπάρχει $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ με $a < r < b$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε τους αριθμούς $\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}}$ και εφαρμόστε την προηγούμενη άσκηση. Μπορείτε να πάρετε ως δεδομένο ότι το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Άσκηση 6 (Απαιτητική)**.** Δείξτε την Αρχή του Ελαχίστου με τη βοήθεια της Αρχής της Επαγωγής.

Υπόδειξη. Θεωρήστε ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ που δεν έχει minimum και εφαρμόστε την Αρχή της Επαγωγής παίρνοντας για ιδιότητα P το εξής:

το $n \in \mathbb{N}$ έχει την ιδιότητα P αν για κάθε φυσικό $k \leq n$ έχουμε $k \notin A$.

Συμπεράνετε ότι ένα $A \subseteq \mathbb{N}$ που δεν έχει minimum πρέπει να είναι το κενό σύνολο.