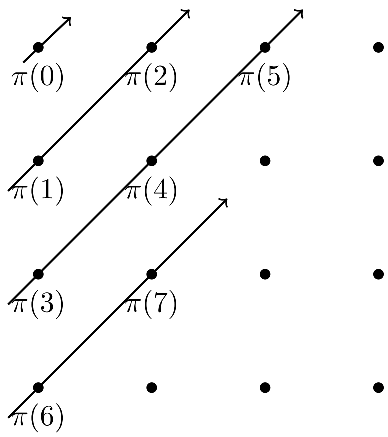
Η ΠΡΩΤΗ ΔΙΑΓΩΝΙΑ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ CANTOR

ΒΑΣΊΛΕΙΟΣ ΓΡΗΓΟΡΊΑΔΗΣ

Θεωρούμε ότι έχουμε μια ακολουθία $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ από μη κενά αριθμήσιμα σύνολα και μια ακολουθία συναρτήσεων $(\pi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ από συναρτήσεις έτσι ώστε $\pi_i : \mathbb{N} \to A_i$ και η να π_i είναι επί για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $a_{i,j} = \pi_i(j)$ για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$ έτσι που το σύνολο $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ ικανοποιεί ότι $A = \{a_{i,j} \ \mid \ i, j \in \mathbb{N}\}$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι το σύνολο A είναι αριθμήσιμο. Προς αυτό ορίζουμε τη συνάρτηση $\pi : \mathbb{N} \to A$, η οποία "απαριθμεί διαγώνια από κάτω προς τα πάνω" σύμφωνα με το πιο κάτω σχήμα:



Πιο πάνω έχουμε στην 1^{η} γραμμή τα στοιχεία του $A_0 = \{a_{0,0},\ a_{0,1},\ a_{0,2}, \dots\} = \{\pi(0), \pi(2), \pi(5), \dots\}$, στη 2^{η} γραμμή τα στοιχεία του $A_1 = \{a_{1,0},\ a_{1,1}, \dots\} = \{\pi(1), \pi(4), \dots\}$ και ούτω καθεξής.

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι η π είναι επί και ότι ο τύπος της δίνεται με τον εξής τρόπο:

$$(1) \qquad \begin{cases} \pi(n) = a_{f(n),g(n)}, \\ \text{όπου } f(n) = \frac{m_n(m_n+3)}{2} - n, \quad g(n) = n - \frac{m_n(m_n+1)}{2} \\ \text{και } m_n = \text{ο μεγαλύτερος φυσικός } m \text{ με } m(m+1) \leq 2n, \\ \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Το πιο πάνω m_n μπορεί επίσης να χαρακτηριστεί με τη βοήθεια τη **συνάρτησης του ακεραίου μέρους**

$$x \mapsto [x] = \text{ ο μεγαλύτερος ακέραιος } m \in \mathbb{Z} \text{ με } m \leq [x] < m+1.$$

Για να το δούμε αυτό θεωρούμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το πολυώνυμο $p_n(x) = x^2 + x - 2n$, έτσι που $p_n(m) \leq 0$ αν και μόνο αν $m(m+1) \leq 2n$. Η διακρίνουσα του p_n είναι η $\Delta_n = 1 + 8n \geq 0$ και άρα το p_n έχει μέχρι δύο πραγματικές ρίζες οι οποίες δίνονται από τον τύπο

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1+8n}}{2}.$$

Είναι σαφές ότι $p(x) \leq 0$ αν και μόνο αν το x βρίσκεται στο κλειστό -μη κενό- διάστημα με άκρα τις πιο πάνω ρίζες. Άρα ψάχνουμε τον μεγαλύτερο φυσικό που βρίσκεται μέσα σε αυτό το διάστημα. Υπάρχει πάντα ένας τέτοιος φυσικός, συγκεκριμένα ο $m = 0$. (Αυτό μπορούμε να το δούμε παρατηρώντας ότι $p(0) = -2n \leq 0$ ή αλλιώς ότι το 0 βρίσκεται ανάμεσα στις πιο πάνω ρίζες.)

Επομένως ο μεγαλύτερος $m \in \mathbb{N}$ με $p(m) \leq 0$ είναι το ακέραιο μέρος της μεγαλύτερης από τις πιο πάνω ρίζες, δηλαδή ο

$$m_n = \left[\frac{-1 + \sqrt{1+8n}}{2} \right].$$

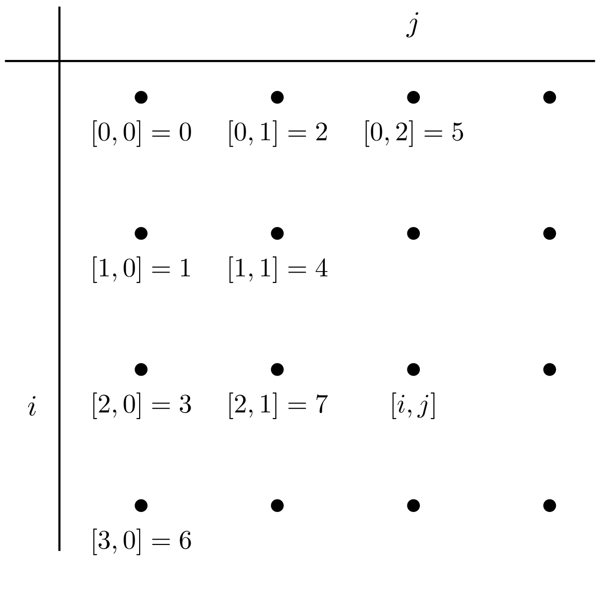
Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι ο τύπος της π δίνεται και με τον εξής τρόπο:

$$\begin{cases} \pi(n) = a_{f(n),g(n)}\ , \\ \text{όπου } f(n) = \dfrac{m_n(m_n+3)}{2} - n, \quad g(n) = n - \dfrac{m_n(m_n+1)}{2} \\ \text{και } m_n = \left[\dfrac{-1 + \sqrt{1+8n}}{2} \right], \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Σχετικά με τον ορισμό της π αυτό που κάνουμε είναι να θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$[\cdot\ ,\ \cdot] : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{N} : (i,j) \mapsto [i,j],$$

η οποία ορίζεται σύμφωνα με το πιο κάτω σχήμα:



Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δείξει πως η συνάρτηση $(i,j) \mapsto [i,j]$ είναι ένα-προς-ένα και επί. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $i,j \in \mathbb{N}$ με $n = [i,j]$ και μάλιστα αυτά είναι μοναδικά.

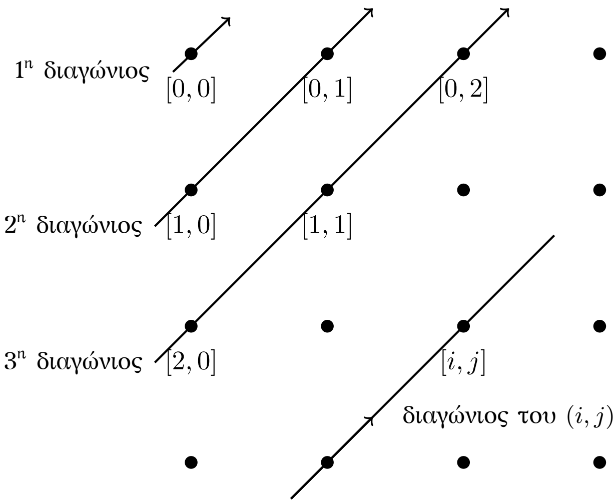
Τότε η πιο πάνω συνάρτηση $\pi : \mathbb{N} \to A$ δίνεται από τον τύπο:

(2) $\qquad \pi(n) = a_{i,j} \ (= \pi_i(j)), \quad$ όπου i,j είναι οι μοναδικοί φυσικοί με $n = [i,j]$.

Από τον πιο πάνω τύπο είναι άμεσο ότι η π είναι επί συνάρτηση. Για να το δούμε αυτό θεωρούμε $a \in A$ και i,j με $a = a_{i,j}$. Παίρνουμε $n = [i,j]$ και έχουμε $\pi(n) = a_{i,j} = a$.

Πρέπει λοιπόν: α) να δώσουμε τον ακριβή ορισμό της $(i,j) \mapsto [i,j]$, β) να δείξουμε ότι αυτή είναι ένα-προς-ένα και επί και γ) να δείξουμε ότι ο ορισμός αυτής της συνάρτησης οδηγεί στον ορισμό της π σύμφωνα με την (1). Πιο κάτω εκτελούμε αυτά τα βήματα.

Ορισμός $(i,j) \mapsto [i,j]$. Θεωρούμε $(i,j) \in \mathbb{N}$. Για τον καθορισμό της τιμής $[i,j]$ μετράμε όλα τα στοιχεία που βρίσκονται στις "διαγώνιους" πριν από αυτή του (i,j) και μετά μετράμε τα στοιχεία της "διαγωνίου" του (i,j) ξεκινώντας από κάτω μέχρι να φτάσουμε στο (i,j). Δείτε το πιο κάτω σχήμα:



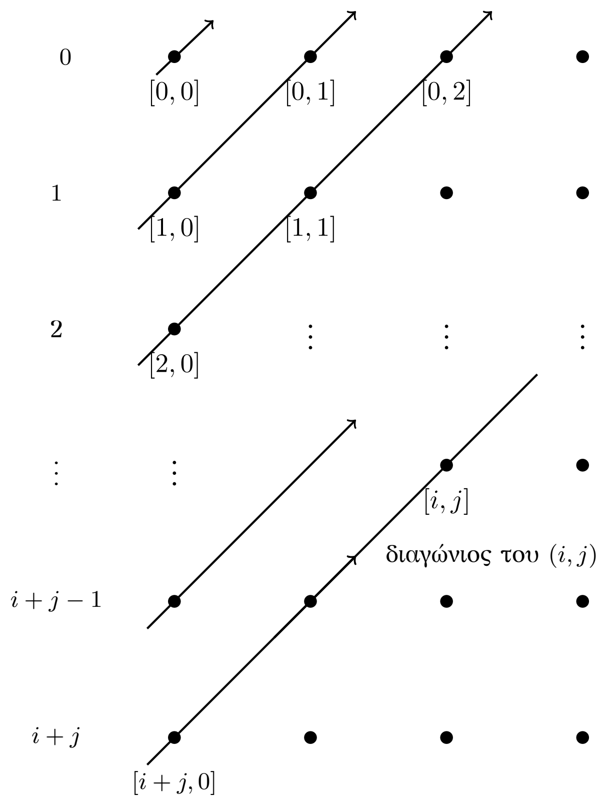
Συμβολίζουμε με $\delta_{i,j}$ το πλήθος όλων των στοιχείων που βρίσκονται στις "διαγώνιους" πριν από αυτή του (i,j) και με $\sigma_{i,j}$ το πλήθος των στοιχείων της διαγωνίου του (i,j) μέχρι και το (i,j). Τότε ισχύει

(3) $$[i,j] = \delta_{i,j} + \sigma_{i,j} - 1.$$

Ο λόγος που αφαιρούμε το 1 είναι γιατί μετράμε πλήθος στοιχείων, το οποίο ξεκινά από το 1 (στην περίπτωση όπου $i = j = 0$), ενώ ξεκινάμε τους φυσικούς από το 0. Για να το εξηγήσουμε καλύτερα όταν $i = j = 0$ τότε $\delta_{0,0} = 0$ (γιατί δεν υπάρχουν διαγώνιοι πριν από αυτή του $(0,0)$) και $\sigma_{0,0} = 1$. Εμείς θέλουμε να έχουμε $[0,0] = 0$, επομένως αφαιρούμε από το άθροισμα $\delta_{0,0} + \sigma_{0,0} = 1$ το 1. Δίνουμε ακόμα ένα παράδειγμα: όταν $(i,j) = (0,1)$ έχουμε $\delta_{0,1} = 1$, $\sigma_{0,1} = 2$ και $[0,1] = 2$, παρατηρούμε ότι $[0,1] = \delta_{0,1} + \sigma_{0,1} - 1$.

Στη συνέχεια θέλουμε να βρούμε πόσες διαγώνιους έχουμε πριν από αυτή του (i,j). Παρατηρούμε ότι σε κάθε διαγώνιο το άθροισμα $i' + j'$ παραμένει το ίδιο για κάθε

(i', j') που βρίσκεται σε αυτή τη διαγώνιο. Μάλιστα στην $1^{\text{η}}$ διαγώνιο το άθροισμα είναι 0 $(0+0)$, στη $2^{\text{η}}$ διαγώνιο είναι 1 $(1+0=0+1=1)$, στην $3^{\text{η}}$ διαγώνιο είναι 2 $(2+0=1+1=0+2=2)$ και ούτω καθεξής. Το πρώτο στοιχείο που συναντάμε στη διαγώνιο που βρίσκεται το (i, j) έχει μηδενική δεύτερη συντεταγμένη. Επομένως οι συντεταγμένες του είναι $(i+j, 0)$. Αυτό σημαίνει ότι οι διαγώνιες που βρίσκονται πριν από αυτή του (i, j) διατρέχουν τις γραμμές από το 0 μέχρι το $i+j-1$. (Όταν $i=j=0$ δεν έχουμε καθόλου τέτοιες διαγώνιες και $\delta_{0,0}=0$.) Δείτε το πιο κάτω σχήμα:



Έχουμε λοιπόν $i+j$ στο πλήθος διαγωνίους πριν από αυτή του (i, j). Η διαγώνιος με αρχή τη γραμμή $i'=0$ έχει ένα στοιχείο, η διαγώνιος με αρχή τη γραμμή $i'=1$ έχει δύο στοιχεία και ούτω καθεξής. Με άλλα λόγια όταν προχωράμε στην επόμενη διαγώνιο το πλήθος των στοιχείων της κάθε διαγωνίου αυξάνεται κατά 1 ξεκινώντας από την πρώτη διαγώνιο που έχει 1 στοιχείο. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\delta_{i,j} = \sum_{k=1}^{i+j} k \ = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} \ .$$

Όσον αφορά τη διαγώνιο του (i, j) ξεκινάμε από το στοιχείο με συντεταγμένες $(i+j, 0)$ και προχωράμε στην πιο πάνω γραμμή όπου μειώνουμε την πρώτη συντεταγμένη κατά 1 και αυξάνουμε τη δεύτερη κατά 1 μέχρι αυτή να γίνει j. Επομένως έχουμε ένα στοιχείο για κάθε ένα από τα $j'=0, \ldots, j$, δηλαδή έχουμε $j+1$ στοιχεία συνολικά. Καταλήγουμε επομένως στο ότι

$$\sigma_{i,j} = j + 1.$$

(Παρατηρούμε ότι το $\sigma_{i,j}$ εξαρτάται μόνο από το j. Αυτό είναι αναμενόμενο καθώς το πλήθος των στοιχείων της τελευταίας διαγωνίου που μας αφορούν είναι ανεξάρτητο από τη γραμμή i που βρισκόμαστε.)

Έχουμε λοιπόν από την (3) ότι

$$[i,j] = \left(\sum_{k=1}^{i+j} k\right) + j \tag{4}$$

$$= \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + j. \tag{5}$$

Αυτό ολοκληρώνει τον ορισμό της συνάρτησης $(i,j) \mapsto [i,j]$.

Η συνάρτηση $(i,j) \mapsto [i,j]$ είναι ένα-προς-ένα. Θεωρούμε (i,j), (i',j') με $[i,j] = [i',j']$ και δείχνουμε ότι $(i,j) = (i',j')$. Αρχικά ισχυριζόμαστε ότι $i+j = i'+j'$. Πράγματι αν δεν ισχύει η τελευταία ισότητα, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $i+j < i'+j'$, έτσι που $i+j+1 \leq i'+j'$. Από την (5) έχουμε

$$\begin{aligned}
[i',j'] &= \left(\sum_{k=1}^{i'+j'} k\right) + j' \geq \sum_{k=1}^{i'+j'} k \geq \sum_{k=1}^{i+j+1} k \\
&= \left(\sum_{k=1}^{i+j} k\right) + (i+j+1) > \left(\sum_{k=1}^{i+j} k\right) + j \\
&= [i,j],
\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο γιατί $[i',j'] = [i,j]$. Επομένως $i+j = i'+j'$ και άρα

$$[i,j] = \left(\sum_{k=1}^{i+j} k\right) + j = \left(\sum_{k=1}^{i'+j'} k\right) + j$$

ενώ

$$[i',j'] = \left(\sum_{k=1}^{i'+j'} k\right) + j'.$$

Αφού $[i,j] = [i',j']$ έχουμε από τις πιο πάνω ισότητες ότι $j = j'$. Επιπλέον αφού $i+j = i'+j'$ και $j = j'$ είναι άμεσο ότι $i = i'$. Άρα η συνάρτηση $(i,j) \mapsto [i,j]$ είναι ένα-προς-ένα.

Η συνάρτηση $(i,j) \mapsto [i,j]$ είναι επί. Θεωρούμε ένα $n \in \mathbb{N}$ και βρίσκουμε $i,j \in \mathbb{N}$ με $n = [i,j]$. Η ιδέα είναι να ανιχνεύσουμε πρώτα το άθροισμα $i+j$, στην ουσία τη διαγώνιο στην οποία βρίσκεται το (i,j) για το οποίο $[i,j] = n$.

Η σχέση (5) μας καθοδηγεί να πάρουμε αρχικά το σύνολο

$$A_n = \left\{ m' \in \mathbb{N} \;\mid\; \frac{m'(m'+1)}{2} \leq n \right\}.$$

Το A_n είναι μη κενό γιατί $0 \in A_n$ και επιπλέον για κάθε $m' \in A_n$ ισχύει $m' \leq n$. Έπειτα παίρνουμε

$$m = \max A_n = \max\left\{m' \in \mathbb{N} \mid \frac{m'(m'+1)}{2} \leq n\right\}. \tag{6}$$

Το πιο πάνω m πρέπει να είναι το άθροισμα $i+j$ για τα ζητούμενα (i,j). Πάλι με την καθοδήγηση της (5) ορίζουμε

$$j = n - \frac{m(m+1)}{2}\ . \tag{7}$$

Επιπλέον επειδή πρέπει να έχουμε $i + j = m$ έχουμε μόνο μια επιλογή για το i συγκεκριμένα την

$$i = m - j. \tag{8}$$

Τότε από τις (5), (7) και (8) έχουμε

$$[i,j] = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + j = \frac{m(m+1)}{2} + j = n.$$

Απομένει να δείξουμε ότι οι ακέραιοι αριθμοί i, j που ορίσαμε πιο πάνω είναι μη αρνητικοί. Ο ισχυρισμός για το j είναι άμεσος: επειδή $m \in A_n$ έχουμε $\frac{m(m+1)}{2} \leq n$ και άρα $j = n - \frac{m(m+1)}{2} \geq 0$. Για να δείξουμε ότι $i \geq 0$ δείχνουμε ισοδύναμα ότι $j \leq m$. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι $j > m$. Θα δείξουμε ότι τότε ισχύει $m+1 \in A_n$, το οποίο είναι άτοπο γιατί το m είναι το μεγαλύτερο στοιχείο του A_n.

Εφόσον $j > m$ έχουμε $m + 1 \leq j$. Αναλύουμε την τελευταία ανίσωση:

$$\begin{aligned} m+1 \leq j &\iff m+1 \leq n - \frac{m(m+1)}{2} \\ &\iff m+1+\frac{m(m+1)}{2} \leq n \\ &\iff \frac{2(m+1)+m(m+1)}{2} \leq n \\ &\iff \frac{(m+1)(m+2)}{2} \leq n. \end{aligned}$$

Η τελευταία ανίσωση δείχνει ότι $m + 1 \in A_n$, το οποίο όπως εξηγήσαμε πιο πάνω είναι άτοπο. Επομένως $j \leq m$ και $i \geq 0$. Έχουμε λοιπόν το ζητούμενο.

Ο τύπος της π. Η απόδειξη του προηγούμενου ισχυρισμού ότι η $(i,j) \mapsto [i,j]$ είναι επί μας εξηγεί πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της τελευταίας. Συγκεκριμένα εφαρμόζουμε τις (6), (7) και (8). Για κάθε n θεωρούμε τον μεγαλύτερο φυσικό m με την ιδιότητα $m(m+1) \leq 2n$ και ορίζουμε

$$\begin{aligned} j &= n - \frac{m(m+1)}{2} \\ i &= m - j \\ &= m - n + \frac{m(m+1)}{2} \\ &= \frac{2m + m(m+1)}{2} - n \\ &= \frac{m(m+3)}{2} - n. \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια

$$n = \left[\frac{m(m+3)}{2} - n, n - \frac{m(m+1)}{2}\right].$$

Από την (2) παίρνουμε

$$\pi(n) = a_{\frac{m(m+3)}{2} - n, n - \frac{m(m+1)}{2}}$$

όπου ο m είναι ο μεγαλύτερος φυσικός για τον οποίο $m(m+1) \leq 2n$. Έχουμε δείξει λοιπόν την (1).