# Εξέταση στη Θεωρία Συνόλων

Επαναληπτική Εξέταση

**Σεπτέμβριος 2023**

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Διάρκεια εξέτασης:
**1 ώρα** και **30 λεπτά**

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

**Σημειώσεις.** Υπάρχουν συνολικά **12 μονάδες**. Η βαθμολογία του γραπτού σας είναι το $\min\{x, 10\}$, όπου $x$ ο βαθμός που γράψατε. Μπορείτε να απαντήσετε σε **όσα ερωτήματα επιθυμείτε** χωρίς κανέναν περιορισμό.

Διευκρινίζεται ότι μέσα στα Αξιώματα του μαθήματος συμπεριλαμβάνεται και το Αξίωμα Επιλογής.

Το $\mathcal{P}(A)$ είναι το δυναμοσύνολο του $A$ και το $B^A$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $A$ στο $B$, όπου τα $A$, $B$ είναι σύνολα.

**Καλή Επιτυχία!**

**Θέμα 1 (3 × 1 μονάδες).**

(i) Διατυπώστε το Αξίωμα του Απείρου.

(ii) Διατυπώστε τον ορισμό της πρόσθεσης στους φυσικούς αριθμούς.

(iii) Αντιστοιχίστε το σύνολο στα αριστερά με το ισοπληθικό του στη δεξιά στήλη (μόνο μία απάντηση είναι σωστή).

(α) $\mathcal{P}(\mathbb{R})$
- $\mathbb{R}$
- $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$
- $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$

(β) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$
- $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$
- $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$
- $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$

**Θέμα 2 ($\mathbf{1,5+2+1}$ μονάδες).** Θεωρούμε έναν καλά διατεταγμένο χώρο $(U, \leq)$. Συμβολίζουμε με $S$ τη μερική συνάρτηση του επομένου στο $U$.

(i) Αν το $y \in U$ είναι οριακό σημείο του $U$ αποδείξτε ότι $y = \sup\{S(x) \mid x < y\}$.

(ii) Υποθέτουμε ότι έχουμε μια συνάρτηση $\pi : U \to U$, η οποία ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

(P1) $\pi(\min U) = \min U$,

(P2) για κάθε $x \in U$ στο οποίο ορίζεται η $S$ ισχύει $\pi(S(x)) = S(\pi(x))$,

(P3) για κάθε οριακό σημείο $y \in U$ ισχύει $\pi(y) = \sup\{S(\pi(x)) \mid x < y\}$.

Αποδείξτε με υπερπεπερασμένη επαγωγή ότι $\pi(y) = y$ για κάθε $y \in U$.

(iii) Θεωρούμε τον επόμενο $Succ(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \cup \{r(\mathbb{N})\}$ του καλά διατεταγμένου χώρου $\mathbb{N}$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $f : Succ(\mathbb{N}) \to Succ(\mathbb{N})$ με $f(n) = n^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f(r(\mathbb{N})) = r(\mathbb{N})$. Αν $U = Succ(\mathbb{N})$ εξετάστε ποιες από τις πιο πάνω ιδιότητες (P2) και (P3) ικανοποιεί η συνάρτηση $f$.

**Θέμα 3 ($\mathbf{1+2,5+1}$ μονάδες).** Δίνεται μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε το σύνολο $P_f$ και τη διμελή σχέση $\leq$ στο $P_f$ ως εξής

$$P_f = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \forall x, y \in A \ \forall t \in [0,1] \text{ ισχύει } f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)\}$$

$$A \leq B \iff A \subseteq B, \quad A, B \in P_f.$$

(i) Αποδείξτε ότι ο $(P_f, \leq)$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος.

(ii) Δείξτε ότι κάθε αλυσίδα $\mathcal{S}$ στον $(P_f, \leq)$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

(iii) Δείξτε ότι ο $(P_f, \leq)$ έχει μεγιστικό στοιχείο. Μπορεί το κενό σύνολο να είναι μεγιστικό;