Εξέταση στη Θεωρία Συνόλων

Φεβρουάριος 2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Διάρκεια εξέτασης:
1 ώρα και **30 λεπτά**

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Σημειώσεις. Υπάρχουν συνολικά **12 μονάδες**. Η βαθμολογία του γραπτού σας είναι το $\min\{x, 10\}$, όπου x ο βαθμός που γράψατε. Μπορείτε να απαντήσετε σε **όσα ερωτήματα επιθυμείτε** χωρίς κανέναν περιορισμό.

Διευκρινίζεται ότι μέσα στα Αξιώματα του μαθήματος συμπεριλαμβάνεται και το Αξίωμα Επιλογής.

Το $\mathcal{P}(A)$ είναι το δυναμοσύνολο του A και το B^A είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το A στο B, όπου τα A, B είναι σύνολα.

Θέμα 1 (**3** × **1** μονάδες)**.**

(i) Δίνονται τρία αντικείμενα x, y, z. Εξηγήστε γιατί ορίζεται το σύνολο $\{x, y, z\}$ με αναφορά στα Αξιώματα που χρειάζονται.

(ii) Αντιστοιχίστε το σύνολο στα αριστερά με το ισοπληθικό του στη δεξιά στήλη (μόνο μία απάντηση είναι σωστή).

(α) $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$
- $\mathcal{P}(\mathbb{R})$
- $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$
- $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$

(β) $\underbrace{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}}_{256 \text{ φορές}}$
- $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$
- $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$

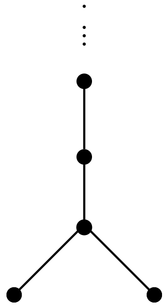
(iii) Δώστε το παράδειγμα ενός μερικά διατεταγμένου χώρου με ακριβώς δύο ελαχιστικά στοιχεία και κανένα μεγιστικό. Μπορείτε να κάνετε μόνο ένα διάγραμμα, δεν απαιτείται απόδειξη.

Λύση.

(i) Από το Αξίωμα του Ζεύγους (και του κενού συνόλου) ορίζονται τα σύνολα $\{x, y\}$ και $\{z\}$ και με μια ακόμα εφαρμογή του Αξιώματος του Ζεύγους (και του κενού συνόλου) ορίζεται το $E = \{\{x, y\}, \{z\}\}$. Από το Αξίωμα της Ένωσης ορίζεται το $\bigcup E = \{x, y, z\}$.

(ii) $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) =_c \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\quad \underbrace{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}}_{256 \text{ φορές}} =_c \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$.

(iii) Ένα κατάλληλο παράδειγμα:



Θέμα 2 ($\mathbf{2+1+1,5}$ μονάδες). Δίνεται ένας καλά διατεταγμένος χώρος $(U, \leq)$ με τις ιδιότητες: (α) το U είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο και (β) για κάθε $y \in U$ το σύνολο $\mathrm{seg}(y) = \{x \in U \mid x < y\}$ είναι αριθμήσιμο.

(i) Δείξτε ότι υπάρχει ένας τέτοιος χώρος $(U, \leq)$.

(ii) Δείξτε ότι ο $(U, \leq)$ δεν είναι όμοιος με κανέναν επόμενο $\mathrm{Succ}(V)$ ενός καλά διατεταγμένου χώρου $(V, \leq_V)$.

(iii) Δίνεται μια συνάρτηση $\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε για κάθε αριθμήσιμο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ το $\Phi(A)$ είναι επίσης αριθμήσιμο σύνολο. Ορίζουμε την οικογένεια $(A_y)_{y \in U}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ με υπερπεπερασμένη αναδρομή ως εξής:

$$a \in A_y \iff \exists x < y \text{ τέτοιο ώστε } a \in \Phi(A_x), \quad \text{όπου } y \in U.$$

Δείξτε ότι το A_y είναι αριθμήσιμο σύνολο για κάθε $y \in U$.

Λύση.

(i) Παίρνουμε $U = \chi(\mathbb{N}) =$ ο χώρος Hartogs του $\mathbb{N}$. Από τις ιδιότητες του χώρου Hartogs έχουμε $\chi(\mathbb{N}) \nleq_c \mathbb{N}$ επομένως ο $\chi(\mathbb{N})$ είναι υπεραριθμήσιμος.

Για κάθε $y \in \chi(\mathbb{N})$ έχουμε είτε ότι $y = \min \chi(\mathbb{N})$ οπότε το $\mathrm{seg}(y)$ είναι το κενό σύνολο, που είναι αριθμήσιμο, είτε ότι $y > \min \chi(\mathbb{N})$ οπότε το $W = \mathrm{seg}(y) \neq \varnothing$ με τη διάταξη του χώρου του Hartogs είναι υπόχωρος του $\chi(\mathbb{N})$. Αν το W ήταν υπεραριθμήσιμο σύνολο τότε θα είχαμε $W \nleq_c \mathbb{N}$ και από τις ιδιότητες του χώρου του Hartogs θα είχαμε $U = \chi(\mathbb{N}) \leq_o W$. Επομένως ο U θα ήταν όμοιος με ένα αρχικό τμήμα του $W = \mathrm{seg}(y)$. Όμως τα αρχικά τμήματα του $\mathrm{seg}(y)$ είναι γνήσια αρχικά τμήματα U, επομένως ο U θα ήταν όμοιος με ένα γνήσιο αρχικό τμήμα του, άτοπο. Άρα το $\mathrm{seg}(y)$ είναι αριθμήσιμο.

(ii) Αν ο $(U, \leq)$ ήταν όμοιος με τον επόμενο $\mathrm{Succ}(V) = V \cup \{r(V)\}$ κάποιου καλά διατατεταγμένου χώρου $(V, \leq_V)$, τότε ο V θα ήταν όμοιος με ένα γνήσιο αρχικό τμήμα του U: συγκεκριμένα αν η $\pi : U \twoheadrightarrow \mathrm{Succ}(V)$ ήταν ομοιότητα τότε το $y = \pi^{-1}(r(V))$ θα ήταν το μέγιστο σημείο του U και ο V θα ήταν όμοιος με το γνήσιο αρχικό τμήμα $\mathrm{seg}(y)$ του U. Από την ιδιότητα (β) το V θα ήταν αριθμήσιμο σύνολο. Αλλά τότε και το $\mathrm{Succ}(V) = V \cup \{r(V)\}$ θα ήταν αριθμήσιμο σύνολο. Επομένως το U θα ήταν αριθμήσιμο σύνολο που είναι άτοπο από την ιδιότητα (β).

(iii) Υποθέτουμε ότι για κάποιο $y \in U$ έχουμε ότι για κάθε $x < y$ το σύνολο A_x είναι αριθμήσιμο. Πρέπει να δείξουμε ότι και το A_y είναι αριθμήσιμο σύνολο. Από την ιδιότητα της Φ το σύνολο $\Phi(A_x)$ είναι αριθμήσιμο σύνολο για κάθε $x < y$. Από τον ορισμό

$$A_y = \bigcup_{x<y} \Phi(A_x) = \bigcup_{x \in \mathrm{seg}(y)} \Phi(A_x),$$

άρα το A_y είναι αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων. Καταλήγουμε ότι το A_y είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Θέμα 3 ($\mathbf{2,5+1+1}$ μονάδες). Δίνεται μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Ορίζουμε το σύνολο P_f και τη διμελή σχέση $\leq$ στο P_f ως εξής

$$P_f = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \forall x, y \in A \text{ ισχύει } f(x+y) = f(x) + f(y)\}$$

$$A \leq B \iff A \subseteq B, \quad A, B \in P_f.$$

Θεωρούμε δεδομένο ότι ο $(P_f, \leq)$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος.

(i) Δείξτε ότι κάθε αλυσίδα $\mathcal{S}$ στον $(P_f, \leq)$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

(ii) Εξηγήστε γιατί ο $(P_f, \leq)$ έχει μεγιστικό στοιχείο.

(iii) Δώστε το παράδειγμα μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία το $[0,\infty)$ είναι μεγιστικό στοιχείο του P_f.

Λύση.

(i) Θεωρούμε μια αλυσίδα $\mathcal{S}$ στον χώρο $(P_f, \leq)$ και θέτουμε $D = \bigcup \mathcal{S}$. Αν δείξουμε ότι $D \in P_f$ τότε θα έχουμε το ζητούμενο για τους εξής λόγους: για κάθε $A \in \mathcal{S}$ έχουμε $A \subseteq D$, δηλαδή $A \leq D$ και άρα το D είναι άνω φράγμα της $\mathcal{S}$. Επιπλέον αν το σύνολο $C \in P_f$ είναι ένα άνω φράγμα της $\mathcal{S}$ τότε το C περιέχει κάθε $A \in \mathcal{S}$, επομένως $D = \bigcup \mathcal{S} \subseteq C$. Άρα $D \leq C$ και το D είναι το ελάχιστο άνω φράγμα της $\mathcal{S}$.

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι το D ανήκει στο P_f. Θεωρούμε λοιπόν $x, y \in D$ και δείχνουμε ότι $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Από τον ορισμό του D υπάρχουν $A_x, A_y \in \mathcal{S}$ με $x \in A_x$ και $y \in A_y$. Επειδή το $\mathcal{S}$ είναι αλυσίδα έχουμε $A_x \subseteq A_y$ ή $A_y \subseteq A_x$. Σε κάθε περίπτωση υπάρχει $A \in \mathcal{S}$ με $x, y \in A$. Επειδή το $\mathcal{S}$ αποτελείται από στοιχεία του P_f και $x, y \in A$ προκύπτει η ζητούμενη ιδιότητα $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

(ii) Από το (i) κάθε αλυσίδα του P_f έχει άνω φράγμα, επομένως από το Λήμμα του Zorn ο P_f έχει μεγιστικό στοιχείο.

(iii) Παίρνουμε την $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. (Οποιαδήποτε συνάρτηση f με $f(x) = x$ για $x \geq 0$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι κατάλληλη - υπάρχουν όμως και άλλες επιλογές πέραν αυτών.)

Προφανώς αν $x, y \in [0,\infty)$ τότε $x + y \in [0,\infty)$ και $f(x+y) = x + y = f(x) + f(y)$. Από την άλλη αν έχουμε ένα $B \subseteq \mathbb{R}$ με $A \subsetneq B$ τότε υπάρχει $x \in B \smallsetminus [0,\infty)$. Παίρνουμε $y = -x > 0$ οπότε

$$f(x+y) = f(0) = 0 < y = f(y) \leq f(y) + f(x).$$

Άρα το $[0,\infty)$ είναι μεγιστικό στοιχείο του P_f.