Εξέταση στη Θεωρία Συνόλων

Σεπτέμβριος 2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Διάρκεια εξέτασης:
1 ώρα και 30 λεπτά

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Σημείωση. Υπάρχουν συνολικά **12 μονάδες**. Η βαθμολογία του γραπτού σας είναι το $\min\{x, 10\}$, όπου x ο βαθμός που γράψατε. Μπορείτε να απαντήσετε σε **όσα ερωτήματα επιθυμείτε** χωρίς κανέναν περιορισμό.

Θέμα 1 ($\mathbf{1 + 1{,}5 + 1}$ μονάδες). Δίνεται ένα σύνολο A.

(i) Να δώσετε τον ορισμό της ένωσης $\bigcup A$.

(ii) Να δείξετε, με πλήρη αναφορά στα αξιώματα που χρησιμοποιήσατε, ότι υπάρχει σύνολο B με την ιδιότητα

$$x \in B \iff \{x\} \in A$$

για κάθε αντικείμενο x.

(iii) Για κάθε αντικείμενα x, y ορίζουμε

$$[x, y] = \{x, y\}.$$

Ισχύει η συνεπαγωγή

$$[x, y] = [a, b] \implies x = a \text{ και } y = b$$

για κάθε αντικείμενα x, y, a, b; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Θέμα 2 ($\mathbf{1 + 1{,}5 + 1}$ μονάδες). Στα (i) και (ii) αυτού το θέματος μπορείτε να κατασκευάσετε διαγράμματα όπως έγινε στις διαλέξεις.

(i) Να δώσετε το παράδειγμα ενός μερικά διατεταγμένου χώρου που έχει **ακριβώς ένα μέγιστο** στοιχείο και **ακριβώς δύο ελαχιστικά** στοιχεία. (Δεν απαιτείται απόδειξη.)

(ii) Να δώσετε το παράδειγμα ενός μερικά διατεταγμένου χώρου που έχει **ακριβώς ένα μεγιστικό στοιχείο** το οποίο **δεν είναι μέγιστο**. (Δεν απαιτείται απόδειξη.)

(iii) Να δείξετε ότι σε κάθε **ολικά** διατεταγμένο χώρο υπάρχει το πολύ ένα μεγιστικό στοιχείο.

Θέμα 3 ($\mathbf{2 + 3}$ μονάδες).

(i) Δίνεται ένας τελεστής πληθικότητας $A \mapsto |A|$, και πληθάριθμοι κ, λ, μ. Να δώσετε τον ορισμό του γινομένου $\kappa \cdot \lambda$ των πληθάριθμων κ, λ και να αποδείξετε ότι

$$\kappa \cdot (\lambda \cdot \mu) =_c (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu.$$

(ii) Δίνεται ένας καλά διατεταγμένος χώρος $(U, \leq)$ με ελάχιστο στοιχείο το 0_U. Ορίζουμε με υπερπεπερασμένη αναδρομή την οικογένεια συνόλων $(A_x)_{x \in U}$ ως εξής:

$$\begin{aligned} &A_{0_U} = \varnothing \\ &A_x = A_y \cup \{y\} \quad \text{αν } x = S_U(y) \text{ για κάποιο } y \in U, \\ &A_x = \bigcup_{y < x} A_y \qquad \text{αν το } x \text{ είναι οριακό σημείο,} \end{aligned}$$

όπου S_U είναι η μερική συνάρτηση του επομένου στον U.

Να δειχθεί ότι

$$A_x = [0_U, x)$$

για κάθε $x \in U$, όπου $[0_U, x)$ είναι το σύνολο όλων των $z \in U$ με $z < x$.