

Εξέταση στη Θεωρία Συνόλων

Ιανουάριος 2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών



Ομάδα Θεμάτων Β

Για τους έχοντες ΑΜ που λήγει σε ένα από
τα ψηφία: **5, 6, 7, 8, 9**

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Διάρκεια εξέτασης: 1 ώρα και 15 λεπτά

Σημειώσεις.

α) Υπάρχουν συνολικά **12 μονάδες**. Η βαθμολογία του γραπτού σας είναι το $\min\{x, 10\}$, όπου x ο βαθμός που γράψατε. Μπορείτε να απαντήσετε σε **όσα ερωτήματα επιθυμείτε** χωρίς κανέναν περιορισμό.

β) Μπορείτε να χρησιμοποιείτε το Αξίωμα Επιλογής ή οποιαδήποτε άλλη ισοδύναμη μορφή του. Πρέπει όμως να το αναφέρετε.

Θέμα 1 (1 + 1, 5 + 0, 5 μονάδες). Για κάθε δύο αντικείμενα x, y ορίζουμε

$$\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{\emptyset, y\}\}.$$

- (i) Να αναφέρετε τα Αξιώματα που χρησιμοποιούνται στον πιο πάνω ορισμό.
- (ii) Δίνονται σύνολα A και B . Βρείτε ένα σύνολο C με την ιδιότητα $\langle x, y \rangle \in C$ για κάθε $x \in A$ και κάθε $y \in B$. Να αναφέρετε όλα τα Αξιώματα που χρησιμοποιήσατε.
- (iii) Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ των συναρτήσεων από το σύνολο των φυσικών αριθμών \mathbb{N} στο \mathbb{N} . Ποιο από τα σύνολα

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), \quad \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$; Δεν απαιτείται απόδειξη. Με $\mathcal{P}(X)$ εννοούμε το δυναμοσύνολο του X .

Θέμα 2 (2 + 1 + 2 μονάδες). Δίνονται δύο καλά διατεταγμένοι χώροι (U, \leq_U) , (V, \leq_V) με $U, V \neq \emptyset$ και υποθέτουμε ότι ο V δεν έχει μέγιστο στοιχείο. Με S_V εννοούμε τη συνάρτηση του επομένου στον V .

Δίνονται επίσης δύο συναρτήσεις $\pi, \tau : U \rightarrow V$ που ικανοποιούν

$$\pi(y) = \sup\{S_V(\pi(x)) \mid x <_U y\} \quad \text{και} \quad \sup\{S_V(\tau(x)) \mid x <_U y\} <_V \tau(y)$$

για κάθε $y \in U$. Τα πιο πάνω suprema λαμβάνονται στον V .

- (i) Δείξτε ότι για κάθε $y', y \in U$ με $y' <_U y$ ισχύει $\tau(y') <_V \tau(y)$.
- (ii) Τι συμπεραίνετε για τη σχέση μεταξύ των U και V ως προς \leq_o ; Δεν απαιτείται εξήγηση.
- (iii) Δείξτε ότι για κάθε $y \in U$ ισχύει $\pi(y) <_V \tau(y)$.

Θέμα 3 (2 + 2 μονάδες). Δίνονται δύο μερικά διατεταγμένοι χώροι (P, \leq_P) και (Q, \leq_Q) με $P, Q \neq \emptyset$.

Θεωρούμε τον χώρο $(P \rightarrow Q)$ των μερικών συναρτήσεων από τον P στον Q με τη μερική διάταξη του περιέχεται \subseteq .

- (i) Δείξτε ότι για κάθε αλυσίδα \mathcal{D} στον $((P \rightarrow Q), \subseteq)$ το σύνολο $f = \bigcup \mathcal{D}$ είναι μερική συνάρτηση από τον P στον Q .
- (ii) Δίνεται μια συνάρτηση $g : P \rightarrow Q$ (ορίζεται σε όλο το P). Δείξτε ότι υπάρχει ένα μη κενό σύνολο $A \subseteq P$ με τις εξής ιδιότητες:

- (1) $(\forall x_1, x_2 \in A)[x_1 \leq_P x_2 \implies g(x_2) \leq_Q g(x_1)]$ και
- (2) για κάθε $B \subseteq P$ που ικανοποιεί τη συνθήκη $(\forall x_1, x_2 \in B)[x_1 \leq_P x_2 \implies g(x_2) \leq_Q g(x_1)]$ αν $A \subseteq B$ τότε $A = B$.