Εξέταση στη Θεωρία Συνόλων

Ιανουάριος 2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Ομάδα Θεμάτων Α

Για τους έχοντες ΑΜ που λήγει σε ένα από τα ψηφία: $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}$

Διάρκεια εξέτασης: 1 ώρα και 15 λεπτά

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Σημειώσεις.

α) Υπάρχουν συνολικά **12 μονάδες**. Η βαθμολογία του γραπτού σας είναι το $\min\{x, 10\}$, όπου x ο βαθμός που γράψατε. Μπορείτε να απαντήσετε σε **όσα ερωτήματα επιθυμείτε** χωρίς κανέναν περιορισμό.

β) Μπορείτε να χρησιμοποιείτε το Αξίωμα Επιλογής ή οποιαδήποτε άλλη ισοδύναμη μορφή του. Πρέπει όμως να το αναφέρετε.

Θέμα 1 ($\mathbf{1} + \mathbf{1{,}5} + \mathbf{0{,}5}$ μονάδες)**.** Για κάθε δύο αντικείμενα x, y ορίζουμε

$$\langle x, y\rangle = \{\{\varnothing, x\}, \{y\}\}.$$

(i) Να αναφέρετε τα Αξιώματα που χρησιμοποιούνται στον πιο πάνω ορισμό.

(ii) Δίνονται σύνολα A και B. Βρείτε ένα σύνολο C με την ιδιότητα $\langle x, y\rangle \in C$ για κάθε $x \in A$ και κάθε $y \in B$. Να αναφέρετε όλα τα Αξιώματα που χρησιμοποιήσατε.

(iii) Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ των συναρτήσεων από το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Ποιο από τα σύνολα

$$\mathbb{R}, \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), \quad \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; Δεν απαιτείται απόδειξη. Με $\mathcal{P}(X)$ εννοούμε το δυναμοσύνολο του X.

Θέμα 2 ($\mathbf{2} + \mathbf{1} + \mathbf{2}$ μονάδες)**.** Δίνονται δύο καλά διατεταγμένοι χώροι $(U, \leq_U)$, $(V, \leq_V)$ με $U, V \neq \varnothing$ και υποθέτουμε ότι ο V δεν έχει μέγιστο στοιχείο. Με S_V εννοούμε τη συνάρτηση του επομένου στον V.

Δίνονται επίσης δύο συναρτήσεις $\pi, \tau : U \to V$ που ικανοποιούν

$$\pi(y) = \sup\{S_V(\pi(x)) \mid x <_U y\} \qquad \text{και} \qquad \tau(y) = \sup\{S_V(\tau(x)) \mid x <_U y\}$$

για κάθε $y \in U$. Τα πιο πάνω suprema λαμβάνονται στον V.

(i) Δείξτε ότι για κάθε $y', y \in U$ με $y' <_U y$ ισχύει $\pi(y') <_V \pi(y)$.

(ii) Τι συμπεραίνετε για τη σχέση μεταξύ των U και V ως προς $\leq_o$; Δεν απαιτείται εξήγηση.

(iii) Δείξτε ότι για κάθε $y \in U$ ισχύει $\pi(y) = \tau(y)$.

Θέμα 3 ($\mathbf{2} + \mathbf{2}$ μονάδες)**.** Δίνονται δύο μερικά διατεταγμένοι χώροι $(P, \leq_P)$ και $(Q, \leq_Q)$ με $P, Q \neq \varnothing$.

Θεωρούμε τον χώρο $(P \rightharpoonup Q)$ των μερικών συναρτήσεων από τον P στον Q με τη μερική διάταξη του περιέχεσθαι $\subseteq$.

(i) Δείξτε ότι για κάθε αλυσίδα $\mathcal{D}$ στον $((P \rightharpoonup Q), \subseteq)$ το σύνολο $f = \bigcup \mathcal{D}$ είναι μερική συνάρτηση από τον P στον Q.

(ii) Δίνεται μια συνάρτηση $g : P \to Q$ (ορίζεται σε όλο το P). Δείξτε ότι υπάρχει ένα μη κενό σύνολο $A \subseteq P$ με τις εξής ιδιότητες:

(1) $\quad (\forall x_1, x_2 \in A)[\, x_1 \leq_P x_2 \implies g(x_1) \leq_Q g(x_2)\,]$ και

(2) $\quad$ για κάθε $B \subseteq P$ που ικανοποιεί τη συνθήκη $(\forall x_1, x_2 \in B)[\, x_1 \leq_P x_2 \implies g(x_1) \leq_Q g(x_2)\,]$ αν $A \subseteq B$ τότε $A = B$.