Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

7ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Υπενθύμιση. Αν $\leq$ είναι μερική διάταξη στο P τότε το **αυστηρό μέρος** ή **αυστηρό κομμάτι** (strict part) της $\leq$ είναι η σχέση $< \subseteq P \times P$,

$$x < y \iff x \leq y \ \& \ x \neq y$$

για $x, y \in P$.

Άσκηση 1 (Προφανής). Έστω $(P, \leq)$ ένας μερικά διατεταγμένος χώρος και $\emptyset \neq P' \subseteq P$. Θεωρούμε τη σχέση $\leq'$ που ορίζεται ως εξής:

$$x \leq' y \iff x \leq y$$

για x, y **που ανήκουν στο υποσύνολο** P'.

Δείξτε ότι η $\leq'$ είναι μερική διάταξη στο P' και πως το αυστηρό μέρος $<'$ της $\leq'$ δίνεται από

$$x <' y \iff x < y$$

για $x, y \in P'$.

Σημείωση: Το ζεύγος $(P', \leq')$ ονομάζεται **υπόχωρος** του $(P, \leq)$ και η σχέση $\leq'$ ονομάζεται **ο περιορισμός της** $\leq$ στο σύνολο P'. Συνήθως συμβολίζουμε την $\leq'$ πάλι με $\leq$ όταν είναι σαφές σε ποιον χώρο αναφερόμαστε. Για παράδειγμα λέμε ότι ο $(P', \leq)$ είναι υπόχωρος του $(P, \leq)$.

Λύση.

Οι ιδιότητες της μεταβατικότητας, αντισυμμετρικότητας και μεταβατικότητας για την $\leq'$ είναι προφανείς από τις αντίστοιχες ιδιότητες της μερικής διάταξης στο P. Σχετικά με το αυστηρό μέρος παρατηρούμε

$$x <' y \iff x \leq' y \ \& \ x \neq y \iff x \leq y \ \& \ x \neq y \iff x < y$$

για $x, y \in P'$.

Άσκηση 2. Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο P. Μια διμελής σχέση $<$ στο P ονομάζεται **αυστηρή διάταξη** στο P αν για κάθε x, y, z ισχύει:

$$\begin{array}{ll} x \not< x & \text{(αντιαυτοπαθής)} \\ (x \not< y) \ \vee \ (y \not< x) & \text{(αντισυμμετρική)} \\ x < y < z \ \longrightarrow \ x < z & \text{(μεταβατική).} \end{array}$$

Σε αυτή την περίπτωση το ζεύγος $(P, <)$ ονομάζεται **αυστηρά διατεταγμένος χώρος**.

Δείξτε τα εξής.

(i) Το αυστηρό μέρος μιας διάταξης στο P είναι αυστηρή διάταξη στο P.

(ii) Για κάθε αυστηρή διάταξη στο P υπάρχει -και μάλιστα μοναδική- διάταξη στο P της οποίας το αυστηρό μέρος είναι η αρχική αυστηρή διάταξη.

Σχόλιο. Αυτή η άσκηση μας λέει ότι οι έννοιες του διατεταγμένου χώρου και αυστηρά διατεταγμένου χώρου είναι άμεσα συνυφασμένες.

Λύση.
(i) Θεωρούμε μια διάταξη $\leq$ στο P και ως συνήθως συμβολίζουμε με $<$ το αυστηρό της μέρος, δηλαδή
$$x < y \iff x \leq y \;\&\; x \neq y, \quad x, y \in P.$$
Στη συνέχεια θεωρούμε $x, y, z \in P$. Εφόσον $x = x$ δεν μπορούμε να έχουμε $x < x$. Επιπλέον αν ισχύει $x < y$ και $y < x$ έχουμε ειδικότερα ότι $x \leq y$ και $y \leq x$. Αφού η $\leq$ είναι διάταξη προκύπτει από τις τελευταίες δύο σχέσεις ότι $x = y$ που αντίκειται στο $x < y$. Άρα τουλάχιστον ένα από τα $x < y$ και $y < x$ δεν ισχύει και επομένως η $<$ είναι αντισυμμετρική σχέση.

Τέλος αν έχουμε $x < y$ και $y < z$ τότε $x \leq y \leq z$ και από τη μεταβατικότητα της $\leq$ έχουμε επίσης $x \leq z$. Αν είχαμε $x = z$ τότε αφού $x < y$ θα είχαμε και $z < y$. Καταλήγουμε λοιπόν ότι $y < z$ και $z < y$ το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την αντισυμμετρικότητα της $<$. Επομένως $x \neq z$ και αφού $x \leq z$ προκύπτει ότι $x < z$.

(ii) Θεωρούμε μια αυστηρή διάταξη $\prec_s$ στο P και ορίζουμε
$$x \preceq y \iff x \prec_s y \;\vee\; x = y.$$
Δείχνουμε ότι η $\preceq$ είναι διάταξη στο P. Θεωρούμε $x, y, z \in P$. Επειδή $x = x$ έχουμε ειδικότερα ότι $x \preceq x$. Αν $x \preceq y$ και $y \preceq x$ τότε: α) $x = y$ ή $x \prec_s y$ και β) $y = x$ και $y \prec_s x$. Δεν μπορεί να ισχύει η δεύτερη ιδιότητα και στο α) και στο β) γιατί η $\prec_s$ είναι αντισυμμετρική. Επομένως σε ένα από τα α) και β) ισχύει η πρώτη ιδιότητα, δηλαδή ισχύει $x = y$.

Τέλος θεωρούμε ότι $x \preceq y$ και $y \preceq z$. Αν $x = y$ ή $y = z$ τότε είναι άμεσο πως $x \preceq z$, επομένως θεωρούμε ότι $x \neq y$ και $y \neq z$. Τότε έχουμε $x \prec_s y \prec_s z$ και από τη μεταβατικότητα της $\prec_s$ προκύπτει ότι $x \prec_s z$, ειδικότερα $x \preceq z$.

Στη συνέχεια θεωρούμε το αυστηρό μέρος $\prec$ της $\preceq$. Για κάθε $x, y \in P$ έχουμε από τον ορισμό του αυστηρού μέρους ότι
$$x \prec y \iff x \preceq y \;\&\; x \neq y \iff x \prec_s y$$
όπου στην τελευταία ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της $\preceq$ καθώς και την αντισυμμετρικότητα της $\prec_s$. Επομένως τα $\prec$ και $\prec_s$ είναι ίσα σύνολα και άρα η $\prec_s$ είναι το αυστηρό μέρος της $\preceq$.

Τέλος αν $\preceq'$ είναι μια διάταξη στο P, της οποίας το αυστηρό μέρος είναι η $\prec_s$, τότε για κάθε $x, y \in P$ έχουμε
$$x \preceq' y \iff (x \prec_s y \;\vee\; x = y) \iff (x \prec y \;\vee\; x = y) \iff x \preceq y.$$
Επομένως τα $\preceq$ και $\preceq'$ είναι ίσα σύνολα και άρα η $\preceq$ είναι μοναδική.

Άσκηση 3 (Αντίστροφη Διάταξη). Έστω $(P, \leq)$ ένας μερικά διατεταγμένος χώρος. Ορίζουμε τη διμελή σχέση $\trianglelefteq$ στο P ως εξής:
$$x \trianglelefteq y \iff y \leq x, \quad x, y \in P.$$
(i) Δείξτε ότι το ζεύγος $(P, \trianglelefteq)$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος.

(ii) Θεωρούμε $S \subseteq P$ και $a \in P$. Αν το a είναι: α) μέγιστο, β) μεγιστικό, γ) άνω φράγμα του S ως προς τη διάταξη $\leq$ τότε τι είναι αντίστοιχα το a ως προς τη διάταξη $\trianglelefteq$;

Σημείωση: Η σχέση $\trianglelefteq$ είναι η **αντίστροφη διάταξη** της $\leq$.

Λύση.
(i) Αφού $x \leq x$ έχουμε και $x \trianglelefteq x$. Έστω $x \trianglelefteq y$ και $y \trianglelefteq x$, τότε $y \leq x$ και $x \leq y$. Από την αντισυμμετρική ιδιότητα της $\leq$ έχουμε $x = y$. Τέλος επαληθεύουμε την μεταβατική ιδιότητα για την $\trianglelefteq$. Έστω $x \trianglelefteq y$ και $y \trianglelefteq z$. Τότε $z \leq y$ και $y \leq x$. Από τη μεταβατική ιδιότητα της $\leq$ έχουμε $z \leq x$, άρα $x \trianglelefteq z$.

(ii) Αν το a είναι $\leq$-μέγιστο του S τότε $a \in S$ και για κάθε $x \in S$ έχουμε $x \leq a$, ισοδύναμα $a \trianglelefteq x$. Επομένως το a είναι $\trianglelefteq$-ελάχιστο του S.

Αν το a είναι $\leq$-μεγιστικό του S τότε $a \in S$ και δεν υπάρχει $x \in S$ με $a < x$. Αν υπήρχε $x \in S$ με $x \triangleleft a$ (δηλαδή $x \trianglelefteq a$ και $x \neq a$), τότε $a \leq x$ και $x \neq a$, ισοδύναμα $a < x$ που είναι άτοπο. Άρα $a \in S$ και δεν υπάρχει $x \in S$ με $x \triangleleft a$ που σημαίνει ότι το a είναι $\trianglelefteq$-ελαχιστικό του S.

Τέλος αν το a είναι άνω φράγμα του S ως προς $\leq$ τότε για κάθε $x \in S$ έχουμε $x \leq a$, ισοδύναμα $a \trianglelefteq x$. Άρα το a είναι κάτω φράγμα του S ως προς $\trianglelefteq$.

Άσκηση 4. Θεωρούμε το σύνολο

$$P = \{(0,0),(0,1)\} \cup \{(i,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i = 1\}$$

όπου $(\mathbb{N}, 0, S)$ είναι ένα σύστημα φυσικών αριθμών και $1 = S0$. Στο P ορίζουμε τη διμελή σχέση $\leq$ ως εξής:

$$(i,x) \leq (j,y) \iff i = j \ \&\ x \leq_{\mathbb{N}} y$$

όπου $\leq_{\mathbb{N}}$ είναι η γνωστή διάταξη των φυσικών αριθμών.

(i) Δείξτε ότι ο $(P, \leq)$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος.

(ii) Αναπαραστήστε τον χώρο $(P, \leq)$ με ένα διάγραμμα στο επίπεδο.

(iii) Βρείτε τα ελαχιστικά στοιχεία του $(P, \leq)$.

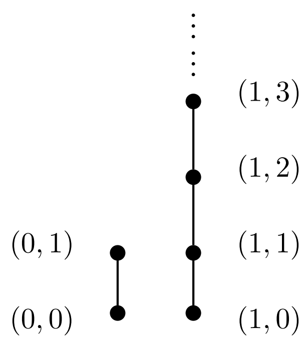
(iv) Δείξτε ότι το $(0,1)$ είναι το μοναδικό μεγιστικό στοιχείο του $(P, \leq)$.

(v) Εξηγείστε γιατί ο $(P, \leq)$ δεν έχει ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο.

Λύση.

(i) Είναι προφανές ότι $(i,x) \leq (i,x)$ για κάθε i, x. Αν $(i,x) \leq (j,y)$ και $(j,y) \leq (i,x)$ τότε $i = j$ και $x \leq_{\mathbb{N}} y \leq_{\mathbb{N}} y$. Από την αντισυμμετρική ιδιότητα της $\leq_{\mathbb{N}}$ έχουμε $x = y$. Για τη μεταβατική ιδιότητα υποθέτουμε ότι $(i,x) \leq (j,y) \leq (k,z)$. Τότε $i = j = k$ και $x \leq_{\mathbb{N}} y \leq_{\mathbb{N}} z$ και από τη μεταβατική ιδιότητα της $\leq_{\mathbb{N}}$ έχουμε $x \leq_{\mathbb{N}} z$. Άρα $(i,x) \leq (k,z)$.

(ii) Το P δίνεται ήδη ως υποσύνολο του επιπέδου, επομένως είναι άμεση η αναπαράστασή του στο επίπεδο. (Φυσικά η αναπαράσταση μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους.) Συνδέουμε με γραμμές τα σημεία που συγκρίνονται.



(iii) Πρώτα δείχνουμε ότι τα $(0,0)$ και $(1,0)$ είναι ελαχιστικά. Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει $(i,x) < (0,0)$. Τότε $(i,x) \leq (0,0)$ επομένως $i = 0$ και $x \leq_{\mathbb{N}} 0$. Επομένως $x = 0$ και $(i,x) = (0,0)$ που είναι άτοπο. Όμοια δείχνουμε ότι δεν υπάρχει (i,x) με $(i,x) < (1,0)$.

Μετά δείχνουμε ότι δεν υπάρχει άλλο ελαχιστικό στοιχείο. Έστω $(i,x) \in P$ με $(i,x) \notin \{(0,0),(1,0)\}$. Θα βρούμε ένα (j,y) με $(j,y) < (i,x)$.

Αν $i = 0$ τότε αναγκαστικά $(i,x) = (0,1)$ το οποίο δεν είναι ελαχιστικό γιατί $(0,0) < (0,1) = (i,x)$. Αν $i = 1$, τότε $x \neq 0$ και επομένως $x = St$ για κάποιο $t \in \mathbb{N}$. Προφανώς $(i,t) < (i,x)$.

(iv) Πρώτα δείχνουμε ότι το $(0,1)$ είναι μεγιστικό στοιχείο. Έστω $(i,x) \in P$ με $(0,1) \leq (i,x)$. Τότε $i = 0$ και $1 \leq_{\mathbb{N}} x$. Αφού $(i,x) \in P$ έχουμε $x = 1$ και άρα $(i,x) = (0,1)$. Επομένως δεν υπάρχει $(i,x) \in P$ με $(0,1) < (i,x)$.

Θεωρούμε στη συνέχεια ένα $(i,x) \in P \setminus \{(0,1)\}$ και δείχνουμε ότι το (i,x) δεν είναι μεγιστικό. Αν $i = 0$ τότε $x = 0$ οπότε έχουμε $(i,x) = (0,0) < (0,1)$. Αν $i = 1$ τότε $(i,x) = (1,x) < (1,Sx)$. Σε κάθε περίπτωση υπάρχει $(j,y) \in P$ με $(i,x) < (j,y)$ και άρα το (i,x) δεν είναι μεγιστικό.

(v) Ο $(P, \leq)$ δεν έχει ελάχιστο γιατί έχει δύο διαφορετικά ελαχιστικά στοιχεία. Επίσης δεν έχει μέγιστο γιατί αν είχε αυτό θα ήταν το μοναδικό μεγιστικό στοιχείο. Από το (iv) το μέγιστο στοιχείο θα ήταν το $(0,1)$. Αλλά τότε θα είχαμε $(j,y) \leq (0,1)$ για κάθε $(j,y) \in P$ που δίνει άτοπο για $j = 0$ (και y τυχαίο φυσικό).

Σχόλιο: Στην προηγούμενη άσκηση είδαμε ότι ένας μερικά διατεταγμένος χώρος μπορεί να έχει μοναδικό μεγιστικό στοιχείο χωρίς όμως να έχει μέγιστο. Στις επόμενες δύο ασκήσεις δείχνουμε ότι αν ο χώρος είναι **πεπερασμένο σύνολο** τότε το μοναδικό μεγιστικό στοιχείο είναι απαραίτητα και μέγιστο.

Άσκηση 5 (Απαιτητική). Δείξτε με επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του P, ότι κάθε μερικά διατεταγμένος χώρος $(P, \leq)$ με το P πεπερασμένο (και μη κενό), έχει μεγιστικό και ελαχιστικό στοιχείο.

Λύση.

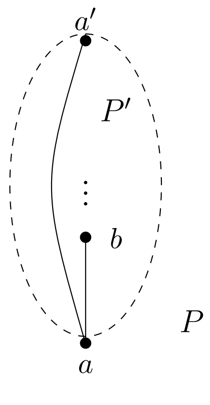
Ασχολούμαστε αρχικά με την ύπαρξη μεγιστικού στοιχείου. Αν το P έχει μόνο ένα στοιχείο τότε αυτό είναι προφανώς μεγιστικό. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει το εξής: κάθε μερικά διατεταγμένος χώρος $(P, \leq)$ με το P να έχει **το πολύ** n στοιχεία και να είναι μη κενό, έχει μεγιστικό στοιχείο.

Δείχνουμε την ιδιότητα για το $n+1$. Έστω ένας μερικά διατεταγμένος χώρος $(P, \leq)$ που έχει το πολύ $n+1$ στοιχεία με $P \neq \emptyset$. Θεωρούμε k το πλήθος των στοιχείων του P. Αν $k \leq n$ τότε έχουμε το ζητούμενο από την Επαγωγική Υπόθεση. Επομένως υποθέτουμε ότι το P έχει ακριβώς $n+1$ στοιχεία.

Θεωρούμε ένα τυχαίο $a \in P$. Αν το a είναι μεγιστικό του P έχουμε το ζητούμενο. Επομένως υποθέτουμε ότι το a δεν είναι μεγιστικό. Τότε υπάρχει $b \in P$ με $a < b$. Ορίζουμε το σύνολο

$$P' = \{x \in P \mid a < x\}.$$

Τότε $b \in P'$ και ειδικότερα $P' \neq \emptyset$. Από την άλλη $a \notin P'$ επομένως το σύνολο P' έχει το πολύ n στοιχεία. Θεωρούμε το P' με τον περιορισμό $\leq'$ της σχέσης $\leq$ (Άσκηση 1). Από την Επαγωγική Υπόθεση το P' έχει ένα μεγιστικό στοιχείο a' ως προς $\leq'$.



Δείχνουμε ότι το a' είναι μεγιστικό στοιχείο του $(P, \leq)$. Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει $x \in P$ με $a' < x$. Επειδή $a' \in P'$ έχουμε $a < a' < x$. Επομένως $a < x$ δηλαδή $x \in P'$. Αφού $a', x \in P'$ και $a' < x$ έχουμε $a' <' x$, όπου $<'$ είναι το αυστηρό μέρος της $\leq'$. Άρα υπάρχει $x \in P'$ με $a' <' x$ που είναι άτοπο γιατί το a' είναι μεγιστικό του $(P', \leq')$. Συνεπώς το a' είναι μεγιστικό στοιχείο του $(P, \leq)$.

Σχετικά με την ύπαρξη ελαχιστικού στοιχείου θεωρούμε την αντίστροφη διάταξη $\trianglelefteq$,

$$x \trianglelefteq y \iff y \leq x,$$

Προφανώς η $\leq$ είναι η αντίστροφη διάταξη της $\trianglelefteq$. Σύμφωνα με την Άσκηση 3 ένα μεγιστικό στοιχείο του $(P, \trianglelefteq)$ είναι ελαχιστικό του $(P, \leq)$. (Φυσικά μπορεί κανείς να δείξει την ύπαρξη ελαχιστικού στοιχείου επαγωγικά όπως και με το μεγιστικό στοιχείο.)

Άσκηση 6 (Απαιτητική). Θεωρούμε έναν μερικά διατεταγμένο χώρο $(P, \leq)$ και ένα **πεπερασμένο** $S \subseteq P$. Αν το $a \in P$ είναι μεγιστικό του S αλλά όχι μέγιστο του S, δείξτε ότι υπάρχει $a' \in S$ με $a' \neq a$ που είναι επίσης μεγιστικό του S.

Συμπεράνετε ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο ενός μερικά διατεταγμένου χώρου που έχει **μοναδικό μεγιστικό** στοιχείο έχει επίσης μέγιστο (που είναι αναγκαστικά το μοναδικό μεγιστικό στοιχείο).

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 5.

Λύση.
Επειδή το a είναι μεγιστικό του S έχουμε ειδικότερα ότι $a \in S$. Αφού το a δεν είναι μέγιστο του S υπάρχει ένα $b \in S$ με $b \nleq a$.

Θεωρούμε το σύνολο
$$P' = \{x \in S \mid b \leq x\}.$$
Τότε $b \in P'$ και $a \notin P'$, ειδικότερα $P' \neq \emptyset$. Επίσης το P' είναι πεπερασμένο ως υποσύνολο του P. Από την Άσκηση 5 ο χώρος P' με τον περιορισμό της διάταξης $\leq$ έχει μεγιστικό στοιχείο $a' \in P'$. Για ευκολία συμβολίζουμε τον περιορισμό της διάταξης $\leq$ στο P' πάλι με $\leq$.

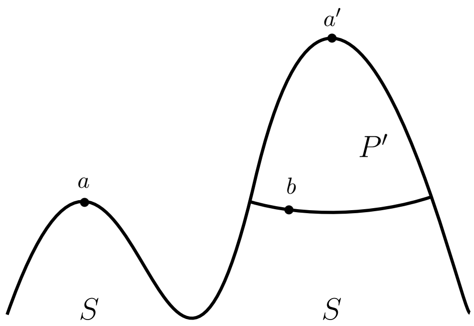
Εφόσον $a' \in P' \subseteq S$ και $a \notin P'$ έχουμε $a' \in S$ και $a' \neq a$. Δείχνουμε ότι το a' είναι μεγιστικό του S.

Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει $x \in S$ με $a' < x$. Αφού $a' \in P'$ έχουμε $b \leq a' < x$. Ειδικότερα $x \in S$ και $b \leq x$, δηλαδή $x \in P'$.

Καταλήγουμε ότι υπάρχει ένα στοιχείο του P' που είναι γνήσια μεγαλύτερο του a' ως προς την $\leq$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί το a' είναι μεγιστικό του P'.

Συνεπώς $a' \nless x$ για κάθε $x \in S$ και το $a' \in S$ είναι μεγιστικό του S.

Σχήμα:



Τα πιο πάνω στοιχεία a, b δεν είναι συγκρίσιμα. Από την επιλογή του b έχουμε $b \nleq a$. Αν είχαμε $a \leq b$ τότε $a < b$ το οποίο είναι άτοπο γιατί $b \in S$ και το a είναι μεγιστικό του S.

Ορισμός (προδιάταξη). Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο P και μια διμελή σχέση $\preceq$ στο P. Η $\preceq$ ονομάζεται **προδιάταξη** στο P αν είναι αυτοπαθής και μεταβατική, δηλαδή για κάθε $x, y, z \in P$ έχουμε
$$\begin{aligned} & x \preceq x \\ \text{και} \quad & x \preceq y \preceq z \;\longrightarrow\; x \preceq z. \end{aligned}$$
Με άλλα λόγια μια προδιάταξη υπολείπεται της αντισυμμετρικότητας από μία διάταξη.

Άσκηση 7 (Κατασκευή προδιατάξεων). Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο P, έναν διατεταγμένο χώρο $(Q, \leq_Q)$ και μια συνάρτηση $f : P \to Q$. Ορίζουμε τη διμελή σχέση $\preceq$ στο P ως εξής:
$$x \preceq y \iff f(x) \leq_Q f(y), \quad x, y \in P.$$
Δείξτε ότι η $\preceq$ είναι προδιάταξη στο P. Βρείτε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την f ώστε η $\preceq$ να είναι διάταξη.

Λύση.
Θεωρούμε $x, y, z \in P$. Επειδή $f(x) \leq_Q f(x)$ έχουμε $x \preceq x$. Αν $x \preceq y \preceq z$ τότε $f(x) \leq_Q f(y) \leq_Q f(z)$ και από τη μεταβατικότητα της $\leq_Q$ προκύπτει ότι $f(x) \leq_Q f(z)$. Άρα $x \preceq z$. Αυτό αποδεικνύει ότι η $\preceq$ είναι προδιάταξη.

Η $\preceq$ είναι διάταξη στο P ακριβώς όταν για κάθε $x, y \in P$ έχουμε
$$(x \preceq y \;\&\; y \preceq x) \;\longrightarrow\; x = y,$$
ισοδύναμα
$$(f(x) \leq_Q f(y) \;\&\; f(y) \leq_Q f(x)) \;\longrightarrow\; x = y.$$

Επειδή η $\leq_Q$ είναι διάταξη ισχύει για κάθε $x, y \in P$ ότι

$$(f(x) \leq_Q f(y) \ \& \ f(y) \leq_Q f(x)) \iff f(x) = f(y).$$

Επομένως η $\preceq$ είναι διάταξη στο P ακριβώς όταν για κάθε $x, y \in P$ ισχύει

$$f(x) = f(y) \longrightarrow x = y,$$

δηλαδή ακριβώς όταν η f είναι ένα-προς-ένα.

Άσκηση 8 (Η προδιάταξη επάγει διάταξη). Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο P και μια προδιάταξη $\preceq$ στο P. Ορίζουμε τη διμελή σχέση $\sim$ ως εξής:

$$x \sim y \iff x \preceq y \ \& \ y \preceq x, \quad x, y \in P.$$

Θεωρώντας δεδομένο ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο P (δείτε το ζητούμενο (i)) συμβολίζουμε με $[x]$ την κλάση ισοδυναμίας του x και με $P/\!\sim$ τον χώρο πηλίκο, δηλαδή

$$[x] = \{y \in P \mid x \sim y\}, \quad x \in P,$$
$$P/\!\sim \, = \{C \subseteq P \mid \exists x \in P \ \big(C = [x]\big)\}.$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τη σχέση $\leq$ ως εξής:

$$C \leq D \iff \exists x, y \ (x \in C \ \& \ y \in D \ \& \ x \preceq y).$$

Με άλλα λόγια διατάσσουμε τις κλάσεις ισοδυναμίας σύμφωνα με τη διάταξη που έχουν οι αντιπρόσωποι των κλάσεων. Αποδεικνύεται ότι δεν έχει σημασία η επιλογή του αντιπροσώπου (δείτε το ζητούμενο (ii)).

Δείξτε τα ακόλουθα.

(i) Η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο P.

(ii) Για κάθε $C, D \in P/\!\sim$ ισχύει

$$C \leq D \iff \forall x, y \ \big(\ (x \in C \ \& \ y \in D) \longrightarrow x \preceq y \ \big).$$

(iii) Η πιο πάνω σχέση $\leq$ είναι διάταξη στο $P/\!\sim$.

Με άλλα λόγια κάθε προδιάταξη επάγει μια διάταξη στον αντίστοιχο χώρο πηλίκο.

Λύση.

(i) Θεωρούμε $x, y, z \in P$. Προφανώς $x \preceq x$ άρα $x \sim x$. Επιπλέον

$$x \sim y \iff x \preceq y \ \& \ y \preceq x \iff y \preceq x \ \& \ x \preceq y \iff y \sim x.$$

Τέλος αν $x \sim y$ και $y \sim z$ τότε $x \preceq y \preceq z$ και άρα $x \preceq z$. Επιπλέον $z \preceq y \preceq x$ και άρα $z \preceq x$. Επομένως ισχύει $x \sim z$. Αυτό δείχνει ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο P.

(ii) Θεωρούμε C και D στον χώρο πηλίκο $P/\!\sim$. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\exists x \in C \ \exists y \in D \ (x \preceq y) \iff \forall x \in C \ \forall y \in D \ (x \preceq y).$$

Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι άμεση χρησιμοποιώντας ότι τα σύνολα C και D είναι, ως κλάσεις ισοδυναμίας, μη κενά. Για την ευθεία κατεύθυνση θεωρούμε $x' \in C$ και $y' \in D$ με $x' \preceq y'$ καθώς και $x \in C$, $y \in D$. Πρέπει να δείξουμε ότι $x \preceq y$. Εφόσον $x, x' \in C$ και $y, y' \in D$ ισχύει $x \sim x'$ και $y \sim y'$. Ειδικότερα έχουμε

$$x \preceq x' \preceq y' \preceq y$$

και από τη μεταβατικότητα της $\preceq$ προκύπτει ότι $x \preceq y$.

(iii) Αρχικά παρατηρούμε ότι από το (ii) ισχύει

$$[x] \leq [y] \iff x \preceq y$$

για κάθε $x, y \in P$.

Θεωρούμε κλάσεις ισοδυναμίας C, D, E. Τότε υπάρχουν $x, y, z \in P$ με $C = [x]$, $D = [y]$ και $E = [z]$. Επειδή $x \preceq x$ έχουμε $C \leq C$. Επιπλέον αν $C \leq D$ και $D \leq C$ τότε $[x] \leq [y]$ και $[y] \leq [x]$. Από την πιο πάνω παρατήρηση προκύπτει ότι $x \preceq y$ και $y \preceq x$, δηλαδή $x \sim y$ και άρα $C = [x] = [y] = D$.

Τέλος υποθέτουμε ότι $C \leq D \leq E$, δηλαδή $[x] \leq [y] \leq [z]$. Τότε $x \preceq y \preceq z$ και από τη μεταβατικότητα της $\preceq$ προκύπτει ότι $x \preceq z$. Επομένως $[x] \leq [z]$ και άρα $C \leq E$.

Συνεπώς έχουμε δείξει ότι η $\leq$ είναι διάταξη στον χώρο πηλίκο $P/\sim$.

Οι επόμενες ασκήσεις είναι προαιρετικές.

Ορισμός (σύγκλιση σε γραμμικά διατεταγμένο χώρο). Δίνεται ένας γραμμικά διατεταγμένος χώρος $(P, \leq)$. Ορίζουμε τα εξής σύνολα:

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \{x \in P \mid a < x < b\}, \\ U(a) &= \{x \in P \mid a < x\}, \\ L(b) &= \{x \in P \mid x < b\}, \end{aligned}$$

όπου $a, b \in P$.

Ένα $I \subseteq P$ λέγεται **βασικό ανοικτό** αν είναι της μορφής $I(a,b)$ ή $U(a)$ ή $L(b)$ για κάποιο/α $a, b \in P$.

Μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο P **συγκλίνει** στο $x \in P$ **ως προς την τοπολογία της διάταξης** αν για κάθε βασικό ανοικτό $I \subseteq P$ με $x \in I$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $x_n \in I$. Σε αυτή την περίπτωση συμβολίζουμε $x_n \to x$.

Άσκηση 9. Αποδείξτε ότι το όριο ακολουθίας ως προς την τοπολογία της διάταξης, εφόσον υπάρχει, είναι μοναδικό.

Λύση.

Θεωρούμε έναν γραμμικά διατεταγμένο χώρο $(P, \leq)$, μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $x, y \in P$ με $x_n \to x$ και $x_n \to y$. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι $x \neq y$. Επειδή η διάταξη $\leq$ είναι γραμμική έχουμε τότε ότι είτε $x < y$ είτε $y < x$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x < y$. Παίρνουμε τα βασικά ανοικτά σύνολα

$$\begin{aligned} U(x) &= \{z \in P \mid x < z\} \\ \text{και} \quad L(y) &= \{z \in P \mid z < y\}. \end{aligned}$$

Προφανώς $y \in U(x)$ και αφού $x_n \to y$ υπάρχει n_0 έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $x_n \in U(x)$. Όμοια αφού $x \in L(y)$ και $x_n \to x$ υπάρχει n_1 έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_1$ να ισχύει $x_n \in L(y)$. Επομένως για $N = \max\{n_0, n_1\}$ έχουμε $x_N \in U(x) \cap L(y)$, ισοδύναμα

$$x < x_N < y.$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τα βασικά ανοικτά σύνολα

$$\begin{aligned} U(x_N) &= \{z \in P \mid x_N < z\} \\ \text{και} \quad L(x_N) &= \{z \in P \mid z < x_N\}. \end{aligned}$$

Προφανώς $U(x_N) \cap L(x_N) = \emptyset$ και αφού $x < x_N < y$ ισχύει επίσης $y \in U(x_N)$ καθώς και $x \in L(x_N)$. Αφού $x_n \to y$ και $x_n \to x$ υπάρχουν $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_2$ να ισχύει $x_n \in U(x_N)$ και για κάθε $n \geq n_3$ να ισχύει $x_n \in L(x_N)$. Τότε για $n = \max\{n_2, n_3\}$ έχουμε $x_n \in U(x_N) \cap L(x_N)$, το οποίο είναι άτοπο γιατί $U(x_N) \cap L(x_N) = \emptyset$.

Σχόλιο. Ο πιο πάνω ορισμός σύγκλισης ακολουθίας ως προς την τοπολογία της διάταξης μπορεί να δοθεί και σε διατεταγμένους χώρους που δεν είναι απαραίτητα γραμμικά διατεταγμένοι. Τότε όμως δεν έχουμε απαραίτητα τη μοναδικότητα του ορίου.

Άσκηση 10 (Σύγκλιση στην εκτεταμένη ευθεία των πραγματικών αριθμών). Θεωρούμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ με τη συνήθη διάταξη $\leq_{\mathbb{R}}$ και παίρνουμε δύο διαφορετικά αντικείμενα, ας τα συμβολίσουμε ∞ και $-\infty$, που δεν ανήκουν στο $\mathbb{R}$ -για παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε $\infty = r(\mathbb{R})$ και $-\infty = r(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$, όπου $r(A)$ είναι το γνωστό σύνολο Russel του A. Ορίζουμε

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

και τη διμελή σχέση $\leq$ στο $\widetilde{\mathbb{R}}$ ως εξής:

$$x \leq y \iff x = -\infty \ \vee \ y = \infty \ \vee \ (x \in \mathbb{R} \ \& \ y \in \mathbb{R} \ \& \ x \leq_{\mathbb{R}} y), \qquad x, y \in \widetilde{\mathbb{R}}.$$

Δείξτε τα ακόλουθα.

(i) Η πιο πάνω σχέση $\leq$ είναι γραμμική διάταξη στο $\widetilde{\mathbb{R}}$.

(ii) Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{R}$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $x_n \to x$ με τη συνήθη έννοια αν και μόνο αν $x_n \to x$ ως προς την τοπολογία της διάταξης.

(iii) Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{R}$ έχουμε $x_n \to \infty$ με τη συνήθη έννοια αν και μόνο αν $x_n \to \infty$ ως προς την τοπολογία της διάταξης. Όμοια για τη σύγκλιση στο $-\infty$.

Σχόλιο. Με βάση αυτή την άσκηση βλέπουμε ότι οι γνωστές έννοιες της σύγκλισης σε πραγματικό αριθμό ή στα $\pm\infty$ είναι ειδική περίπτωση σύγκλισης σε γραμμικά διατεταγμένο χώρο.

Λύση.

(i) Παρατηρούμε από τον ορισμό της $\leq$ ότι $x \leq \infty$ και $-\infty \leq x$ για κάθε $x \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Επίσης η μοναδική περίπτωση το ∞ να είναι στην αριστερή πλευρά της ανίσωσης $x \leq y$ είναι όταν $y = \infty$, με άλλα λόγια ισχύει

(1) $$\forall y \in \widetilde{\mathbb{R}} \ (\infty \leq y \ \longrightarrow \ y = \infty).$$

Όμοια

(2) $$\forall x \in \widetilde{\mathbb{R}} \ (x \leq -\infty \ \longrightarrow \ x = -\infty).$$

Στη συνέχεια επαληθεύουμε τις ιδιότητες της διάταξης για τη διμελή σχέση $\leq$. Προφανώς $\infty \leq \infty$, $-\infty \leq -\infty$ και $x \leq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως ισχύει $x \leq x$ για κάθε $x \in \widetilde{\mathbb{R}}$.

Υποθέτουμε ότι $x \leq y$ και $y \leq x$ για κάποια $x, y \in \widetilde{\mathbb{R}}$ και δείχνουμε ότι $x = y$. Αν κάποιο από τα x, y είναι ίσο με ∞ τότε ισχύει είτε $\infty \leq y$ (από την $x \leq y$ αν $x = \infty$) είτε $\infty \leq x$ (από την $y \leq x$ αν $y = \infty$). Προκύπτει τότε από την (1) ότι $x = y = \infty$. Όμοια αν κάποιο από τα x, y είναι ίσο με $-\infty$ έχουμε από την (2) ότι $x = y = -\infty$. Αν $x, y \in \mathbb{R}$ τότε $x \leq_{\mathbb{R}} y \leq_{\mathbb{R}} x$ και αφού η $\leq_{\mathbb{R}}$ είναι διάταξη έχουμε πάλι ότι $x = y$.

Έπειτα υποθέτουμε ότι $x \leq y \leq z$ και δείχνουμε ότι $x \leq z$. Αν $x = -\infty$ ή $z = \infty$ τότε $x \leq z$ από τον ορισμό της $\leq$. Αν $x = \infty$ τότε από την (1) ισχύει $y = \infty$ και με μια ακόμα εφαρμογή της (1) στο z προκύπτει ότι $z = \infty = x$, άρα $x \leq z$. Όμοια αν $z = -\infty$ καταλήγουμε με διαδοχικές εφαρμογές της (2) ότι $x = -\infty = z$ και επομένως $x \leq z$.

Απομένει η περίπτωση $x, z \in \mathbb{R}$ για τη μεταβατική ιδιότητα. Εφόσον $x \leq y \leq z$ και $x, y \in \mathbb{R}$ προκύπτει από τις (1) και (2) ότι $y \in \mathbb{R}$, επομένως $x \leq_{\mathbb{R}} y \leq_{\mathbb{R}} z$. Από τη μεταβατικότητα της $\leq_{\mathbb{R}}$ παίρνουμε $x \leq_{\mathbb{R}} z$ και άρα $x \leq z$.

Τέλος δείχνουμε ότι η $\leq$ είναι γραμμική. Θεωρούμε $x, y \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Αν $x, y \in \mathbb{R}$ τότε από τη γραμμικότητα της $\leq_{\mathbb{R}}$ έχουμε $x \leq_{\mathbb{R}} y$ ή $y \leq_{\mathbb{R}} x$, άρα $x \leq y$ ή $y \leq x$. Αν $x = \infty$ τότε $y \leq \infty = x$ και αν $x = -\infty$ τότε $x = -\infty \leq y$. Όμοια αν $y \in \{\infty, -\infty\}$ προκύπτει ότι $x \leq y$ ή $y \leq x$.

(ii) Αν $x_n \to x \in \mathbb{R}$ με τη συνήθη έννοια και το $I \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$ είναι βασικό ανοικτό με $x \in I$ υπάρχει σε κάθε περίπτωση ένα $\varepsilon > 0$ με $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq I$. Από την υπόθεσή μας υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq I$. Άρα $x_n \to x$ ως προς την τοπολογία της διάταξης.

Αντίστροφα αν $x_n \to x$ ως προς την τοπολογία της διάταξης, θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και παίρνουμε το βασικό ανοικτό σύνολο $I(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ το οποίο είναι ίσο με το ανοικτό διάστημα $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Από την υπόθεσή μας υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $x_n \in I(x - \varepsilon, x + \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Επομένως $x_n \to x$ με τη συνήθη έννοια.

(iii) Αν $x_n \to \infty$ με τη συνήθη έννοια και το $I \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$ είναι βασικό ανοικτό με $\infty \in I$ τότε το I είναι αναγκαστικά της μορφής $U(a) = \{z \in \widetilde{R} \mid a < z\}$ για κάποιο $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$ -στις άλλες περιπτώσεις θα είχαμε $\infty < b$ για κάποιο $b \in \mathbb{R}$ που είναι αδύνατο. Εφόσον $x_n \to \infty$ υπάρχει n_0 έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $x_n > a$, επομένως $x_n \in U(a) = I$. Αυτό δείχνει ότι $x_n \to \infty$ ως προς την τοπολογία της διάταξης.

Αντίστροφα αν $x_n \to \infty$ ως προς την τοπολογία της διάταξης και $M > 0$ παίρνουμε το βασικό ανοικτό σύνολο $U(M) = \{z \in \widetilde{R} \mid M < z\}$. Από την υπόθεσή μας υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $x_n \in U(M)$, επομένως $M < x_n$. Αυτό δείχνει ότι $x_n \to \infty$ με τη συνήθη έννοια.

Η περίπτωση $x_n \to -\infty$ αποδεικνύεται όμοια και παραλείπεται.