Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

7ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Υπενθύμιση. Αν $\leq$ είναι μερική διάταξη στο P τότε το **αυστηρό μέρος** ή **αυστηρό κομμάτι** (strict part) της $\leq$ είναι η σχέση $< \subseteq P \times P$,

$$x < y \iff x \leq y \ \&\ x \neq y$$

για $x, y \in P$.

Άσκηση 1 (Προφανής). Έστω $(P, \leq)$ ένας μερικά διατεταγμένος χώρος και $\emptyset \neq P' \subseteq P$. Θεωρούμε τη σχέση $\leq'$ που ορίζεται ως εξής:

$$x \leq' y \iff x \leq y$$

για x, y **που ανήκουν στο υποσύνολο** P'.

Δείξτε ότι η $\leq'$ είναι μερική διάταξη στο P' και πως το αυστηρό μέρος $<'$ της $\leq'$ δίνεται από

$$x <' y \iff x < y$$

για $x, y \in P'$.

Σημείωση: Το ζεύγος $(P', \leq')$ ονομάζεται **υπόχωρος** του $(P, \leq)$ και η σχέση $\leq'$ ονομάζεται **ο περιορισμός της** $\leq$ στο σύνολο P'. Συνήθως συμβολίζουμε την $\leq'$ πάλι με $\leq$ όταν είναι σαφές σε ποιον χώρο αναφερόμαστε. Για παράδειγμα λέμε ότι ο $(P', \leq)$ είναι υπόχωρος του $(P, \leq)$.

Άσκηση 2. Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο P. Μια διμελής σχέση $<$ στο P ονομάζεται **αυστηρή διάταξη** στο P αν για κάθε x, y, z ισχύει:

$$\begin{aligned} & x \not< x && \text{(αντιαυτοπαθής)} \\ & (x \not< y) \ \vee \ (y \not< x) && \text{(αντισυμμετρική)} \\ & x < y < z \ \longrightarrow \ x < z && \text{(μεταβατική).} \end{aligned}$$

Σε αυτή την περίπτωση το ζεύγος $(P, <)$ ονομάζεται **αυστηρά διατεταγμένος χώρος**.

Δείξτε τα εξής.

(i) Το αυστηρό μέρος μιας διάταξης στο P είναι αυστηρή διάταξη στο P.

(ii) Για κάθε αυστηρή διάταξη στο P υπάρχει -και μάλιστα μοναδική- διάταξη στο P της οποίας το αυστηρό μέρος είναι η αρχική αυστηρή διάταξη.

Σχόλιο. Αυτή η άσκηση μας λέει ότι οι έννοιες του διατεταγμένου χώρου και αυστηρά διατεταγμένου χώρου είναι άμεσα συνυφασμένες.

Άσκηση 3 (Αντίστροφη Διάταξη). Έστω $(P, \leq)$ ένας μερικά διατεταγμένος χώρος. Ορίζουμε τη διμελή σχέση $\trianglelefteq$ στο P ως εξής:

$$x \trianglelefteq y \iff y \leq x, \quad x, y \in P.$$

(i) Δείξτε ότι το ζεύγος $(P, \trianglelefteq)$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος.

(ii) Θεωρούμε $S \subseteq P$ και $a \in P$. Αν το a είναι: α) μέγιστο, β) μεγιστικό, γ) άνω φράγμα του S ως προς τη διάταξη $\leq$ τότε τι είναι αντίστοιχα το a ως προς τη διάταξη $\trianglelefteq$;

Σημείωση: Η σχέση $\trianglelefteq$ είναι η **αντίστροφη διάταξη** της $\leq$.

Άσκηση 4. Θεωρούμε το σύνολο
$$P = \{(0,0),(0,1)\} \cup \{(i,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid i = 1\}$$
όπου $(\mathbb{N}, 0, S)$ είναι ένα σύστημα φυσικών αριθμών και $1 = S0$. Στο P ορίζουμε τη διμελή σχέση $\leq$ ως εξής:
$$(i,x) \leq (j,y) \iff i = j \;\&\; x \leq_{\mathbb{N}} y$$
όπου $\leq_{\mathbb{N}}$ είναι η γνωστή διάταξη των φυσικών αριθμών.

(i) Δείξτε ότι ο $(P,\leq)$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος.

(ii) Αναπαραστήστε τον χώρο $(P,\leq)$ με ένα διάγραμμα στο επίπεδο.

(iii) Βρείτε τα ελαχιστικά στοιχεία του $(P,\leq)$.

(iv) Δείξτε ότι το $(0,1)$ είναι το μοναδικό μεγιστικό στοιχείο του $(P,\leq)$.

(v) Εξηγείστε γιατί ο $(P,\leq)$ δεν έχει ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο.

Σχόλιο: Στην προηγούμενη άσκηση είδαμε ότι ένας μερικά διατεταγμένος χώρος μπορεί να έχει μοναδικό μεγιστικό στοιχείο χωρίς όμως να έχει μέγιστο. Στις επόμενες δύο ασκήσεις δείχνουμε ότι αν ο χώρος είναι **πεπερασμένο σύνολο** τότε το μοναδικό μεγιστικό στοιχείο είναι απαραίτητα και μέγιστο.

Άσκηση 5 (Απαιτητική). Δείξτε με επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του P, ότι κάθε μερικά διατεταγμένος χώρος $(P,\leq)$ με το P πεπερασμένο (και μη κενό), έχει μεγιστικό και ελαχιστικό στοιχείο.

Άσκηση 6 (Απαιτητική). Θεωρούμε έναν μερικά διατεταγμένο χώρο $(P,\leq)$ και ένα **πεπερασμένο** $S \subseteq P$. Αν το $a \in P$ είναι μεγιστικό του S αλλά όχι μέγιστο του S, δείξτε ότι υπάρχει $a' \in S$ με $a' \neq a$ που είναι επίσης μεγιστικό του S.

Συμπεράνετε ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο ενός μερικά διατεταγμένου χώρου που έχει **μοναδικό μεγιστικό** στοιχείο έχει επίσης μέγιστο (που είναι αναγκαστικά το μοναδικό μεγιστικό στοιχείο).

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 5.

Ορισμός (προδιάταξη). Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο P και μια διμελή σχέση $\preceq$ στο P. Η $\preceq$ ονομάζεται **προδιάταξη** στο P αν είναι αυτοπαθής και μεταβατική, δηλαδή για κάθε $x, y, z \in P$ έχουμε
$$\begin{aligned} & x \preceq x \\ \text{και} \quad & x \preceq y \preceq z \;\longrightarrow\; x \preceq z. \end{aligned}$$
Με άλλα λόγια μια προδιάταξη υπολείπεται της αντισυμμετρικότητας από μία διάταξη.

Άσκηση 7 (Κατασκευή προδιατάξεων). Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο P, έναν διατεταγμένο χώρο $(Q,\leq_Q)$ και μια συνάρτηση $f : P \to Q$. Ορίζουμε τη διμελή σχέση $\preceq$ στο P ως εξής:
$$x \preceq y \iff f(x) \leq_Q f(y), \quad x, y \in P.$$
Δείξτε ότι η $\preceq$ είναι προδιάταξη στο P. Βρείτε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την f ώστε η $\preceq$ να είναι διάταξη.

Άσκηση 8 (Η προδιάταξη επάγει διάταξη). Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο P και μια προδιάταξη $\preceq$ στο P. Ορίζουμε τη διμελή σχέση $\sim$ ως εξής:

$$x \sim y \iff x \preceq y \ \&\ y \preceq x, \quad x, y \in P.$$

Θεωρώντας δεδομένο ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο P (δείτε το ζητούμενο (i)) συμβολίζουμε με $[x]$ την κλάση ισοδυναμίας του x και με $P/\!\sim$ τον χώρο πηλίκο, δηλαδή

$$[x] = \{y \in P \mid x \sim y\}, \quad x \in P,$$
$$P/\!\sim\, = \{C \subseteq P \mid \exists x \in P \ \big(C = [x]\big)\}.$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τη σχέση $\leq$ ως εξής:

$$C \leq D \iff \exists x, y \ (x \in C \ \&\ y \in D \ \&\ x \preceq y).$$

Με άλλα λόγια διατάσσουμε τις κλάσεις ισοδυναμίας σύμφωνα με τη διάταξη που έχουν οι αντιπρόσωποι των κλάσεων. Αποδεικνύεται ότι δεν έχει σημασία η επιλογή του αντιπροσώπου (δείτε το ζητούμενο (ii)).

Δείξτε τα ακόλουθα.

(i) Η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο P.

(ii) Για κάθε $C, D \in P/\!\sim$ ισχύει

$$C \leq D \iff \forall x, y \ \big(\ (x \in C \ \&\ y \in D) \ \longrightarrow \ x \preceq y \ \big).$$

(iii) Η πιο πάνω σχέση $\leq$ είναι διάταξη στο $P/\!\sim$.

Με άλλα λόγια κάθε προδιάταξη επάγει μια διάταξη στον αντίστοιχο χώρο πηλίκο.

Οι επόμενες ασκήσεις είναι προαιρετικές.

Ορισμός (σύγκλιση σε γραμμικά διατεταγμένο χώρο). Δίνεται ένας γραμμικά διατεταγμένος χώρος $(P, \leq)$. Ορίζουμε τα εξής σύνολα:

$$I(a, b) = \{x \in P \mid a < x < b\},$$
$$U(a) = \{x \in P \mid a < x\},$$
$$L(b) = \{x \in P \mid x < b\},$$

όπου $a, b \in P$.

Ένα $I \subseteq P$ λέγεται **βασικό ανοικτό** αν είναι της μορφής $I(a, b)$ ή $U(a)$ ή $L(b)$ για κάποιο/α $a, b \in P$.

Μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο P **συγκλίνει** στο $x \in P$ **ως προς την τοπολογία της διάταξης** αν για κάθε βασικό ανοικτό $I \subseteq P$ με $x \in I$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $x_n \in I$. Σε αυτή την περίπτωση συμβολίζουμε $x_n \to x$.

Άσκηση 9. Αποδείξτε ότι το όριο ακολουθίας ως προς την τοπολογία της διάταξης, εφόσον υπάρχει, είναι μοναδικό.

Άσκηση 10 (Σύγκλιση στην εκτεταμένη ευθεία των πραγματικών αριθμών). Θεωρούμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ με τη συνήθη διάταξη $\leq_{\mathbb{R}}$ και παίρνουμε δύο διαφορετικά αντικείμενα, ας τα συμβολίσουμε ∞ και $-\infty$, που δεν ανήκουν στο $\mathbb{R}$ -για παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε $\infty = r(\mathbb{R})$ και $-\infty = r(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$, όπου $r(A)$ είναι το γνωστό σύνολο Russel του A. Ορίζουμε

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

και τη διμελή σχέση $\leq$ στο $\widetilde{\mathbb{R}}$ ως εξής:

$$x \leq y \iff x = -\infty \ \vee \ y = \infty \ \vee \ (x \in \mathbb{R} \ \&\ y \in \mathbb{R} \ \&\ x \leq_{\mathbb{R}} y), \qquad x, y \in \widetilde{\mathbb{R}}.$$

Δείξτε τα ακόλουθα.

(i) Η πιο πάνω σχέση $\leq$ είναι γραμμική διάταξη στο $\widetilde{\mathbb{R}}$.

(ii) Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{R}$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $x_n \to x$ με τη συνήθη έννοια αν και μόνο αν $x_n \to x$ ως προς την τοπολογία της διάταξης.

(iii) Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{R}$ έχουμε $x_n \to \infty$ με τη συνήθη έννοια αν και μόνο αν $x_n \to \infty$ ως προς την τοπολογία της διάταξης. Όμοια για τη σύγκλιση στο $-\infty$.

Σχόλιο. Με βάση αυτή την άσκηση βλέπουμε ότι οι γνωστές έννοιες της σύγκλισης σε πραγματικό αριθμό ή στα $\pm\infty$ είναι ειδική περίπτωση σύγκλισης σε γραμμικά διατεταγμένο χώρο.