Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

5ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Κατασκευή συστήματος φυσικών αριθμών από δοσμένο σύστημα). Θεωρούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$, ένα σύνολο $\mathbb{N}_2$ και μια $1-1$ και επί συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \rightarrowtail\!\!\!\rightarrow \mathbb{N}_2$. Δείξτε ότι υπάρχουν $0_2 \in \mathbb{N}_2$ και $S_2 : \mathbb{N}_2 \to \mathbb{N}_2$ έτσι ώστε η τριάδα $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ να είναι σύστημα φυσικών αριθμών.

Άσκηση 2. Θεωρούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}, 0, S)$, ένα σύνολο X, ένα στοιχείο $x_0 \in X$ και μια συνάρτηση $g : X \to X$. Δείξτε τα εξής:

(i) Υπάρχει μια ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με τις ιδιότητες $A_0 = \{x_0\}$ και $A_{Sn} = g[A_n]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Υπάρχει ένα **αριθμήσιμο** σύνολο B με την ιδιότητες $x_0 \in B$ και αν $x \in B$ τότε $g(x) \in B$.

Άσκηση 3. Αποδείξτε τη μοναδικότητα της συνάρτησης f στο Θεώρημα Αναδρομής: για κάθε συνόλο E, κάθε $a \in E$ και κάθε συνάρτηση $h : E \to E$ υπάρχει το πολύ μία συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ με τις ιδιότητες $f(0) = a$ και $f(Sn) = h(f(n))$ για κάθε n, όπου $(\mathbb{N}, 0, S)$ είναι ένα σύστημα φυσικών αριθμών.

Άσκηση 4 (Μοναδικότητα φυσικών αριθμών - μέρος α΄). Θεωρούμε δύο συστήματα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ και $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ και μια συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ με τις ιδιότητες:

$$\begin{aligned} \pi(0_1) &= 0_2 \\ \pi(S_1 n) &= S_2 \pi(n) \quad n \in \mathbb{N}_1. \end{aligned}$$

(i) Δείξτε ότι η π είναι επί.

Υπόδειξη: Θεωρήστε το σύνολο $X = \{m \in \mathbb{N}_2 \mid (\exists n \in \mathbb{N}_1)[m = \pi(n)]\}$.

(ii) Δείξτε ότι η π είναι $1-1$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε το σύνολο $Y = \{n \in \mathbb{N}_1 \mid (\forall m \in \mathbb{N}_1)[\pi(n) = \pi(m)] \implies n = m\}$.

Άσκηση 5 (Μοναδικότητα φυσικών αριθμών - μέρος β΄). Θεωρούμε δύο συστήματα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ και $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ που ικανοποιεί

$$\begin{aligned} \pi(0_1) &= 0_2 \\ \pi(S_1 n) &= S_2 \pi(n), \quad n \in \mathbb{N}_1. \end{aligned}$$

Σχόλιο: Με βάση την προηγούμενη άσκηση αυτή η μοναδική συνάρτηση π είναι αντιστοιχία. Από αυτές τις δύο ασκήσεις προκύπτει ότι στην ουσία έχουμε μόνο ένα σύστημα φυσικών αριθμών, δηλαδή για κάθε δύο συστήματα η δομή του ενός μεταφέρεται στο άλλο μέσω μιας αντιστοιχίας.