

Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών



4ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Άσκηση 4.4 plus σελ. 39).

- Αν $(x, y, z) = (x', y', z')$ δείξτε ότι $x = x'$, $y = y'$ και $z = z'$.
- Δίνονται σύνολα A, B και C . Εξηγήστε γιατί το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B \times C$ είναι σύνολο.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε αυτά που ξέρετε για τα ζεύγη αντικειμένων και το καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων.

Ορισμός. Η ξένη ένωση $A \uplus B$ των συνόλων A, B ορίζεται ως εξής:

$$A \uplus B = (\{\emptyset\} \times A) \cup (\{\{\emptyset\}\} \times B).$$

Παρατηρήστε ότι $(\{\emptyset\} \times A) \cap (\{\{\emptyset\}\} \times B) = \emptyset$ ακριβώς επειδή $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. Η ιδέα στον ορισμό της ξένης ένωσης είναι να δημιουργήσουμε δύο ξένα “αντίγραφα” των A, B και μετά να πάρουμε την ένωσή τους.

Κάπως πιο γλαφυρά θεωρούμε ότι βάφουμε τα στοιχεία των A, B με διαφορετικά χρώματα και μετά τα τοποθετούμε μαζί σε ένα σύνολο. Ας καλέσουμε το ένα χρώμα **κόκκινο** και το άλλο **μπλε**. Το βάψιμο επιτυγχάνεται μέσω των απεικονίσεων $a \mapsto (\text{κόκκινο}, a)$ και $b \mapsto (\text{μπλε}, b)$, έτσι που το $\{\text{κόκκινο}\} \times A$ είναι το A με τα στοιχεία του βαμμένα κόκκινα και το $\{\text{μπλε}\} \times B$ είναι το B με τα στοιχεία του βαμμένα μπλε. Για να διατυπωθεί αυτό στη γλώσσα της Θεωρίας Συνόλων παίρνουμε για **κόκκινο** να είναι το \emptyset και για **μπλε** να είναι το $\{\emptyset\}$ και παρατηρούμε ότι **κόκκινο** \neq **μπλε**.

Άσκηση 2 (Άσκηση 4.18 σελ. 45). Δείξτε ότι αν $A =_c A'$ και $B = B'$ τότε

- $A \uplus B =_c A' \uplus B'$
- $A \times B =_c A' \times B'$
- $(A \rightarrow B) =_c (A' \rightarrow B')$.

Σχόλιο. Στα (i) και (ii) να ορίσετε μόνο τις ζητούμενες συναρτήσεις χωρίς να δείξετε ότι είναι 1-1 και επί. Το (iii) το έχουμε δείξει σε προηγούμενη άσκηση. Εδώ εξηγήστε γιατί η αντιστοιχία $H : (A \rightarrow B) \rightarrow (A' \rightarrow B')$ που ορίσαμε είναι σύνολο.

Άσκηση 3. Δίνεται μια οικογένεια συνόλων $(A_i)_{i \in I}$ όπου το I είναι μη κενό σύνολο. Δείξτε ότι ορίζονται σύνολα $\bigcup_{i \in I} A_i$, $\bigcap_{i \in I} A_i$, και $\prod_{i \in I} A_i$ που ικανοποιούν τα εξής:

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i \in I} A_i &\iff \exists i \in I (x \in A_i) \\ x \in \bigcap_{i \in I} A_i &\iff \forall i \in I (x \in A_i) \\ y \in \prod_{i \in I} A_i &\iff \text{το } y \text{ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το } I \text{ και } \forall i \in I (y(i) \in A_i). \end{aligned}$$

Αναφερθείτε στα Αξιώματα που χρησιμοποιήσατε.

Άσκηση 4. Δίνεται ένα μη κενό σύνολο I και μια οικογένεια συνόλων $(A_i)_{i \in I}$ με δείκτες στο I . Τότε υπάρχει σύνολο E και συνάρτηση $g : I \rightarrow \mathcal{P}(E)$ με $A_i = g(i)$ για κάθε $i \in I$. Δηλαδή μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλα τα A_i είναι υποσύνολα του ίδιου συνόλου.