

Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών



3ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
B. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Ασκήσεις 3.13 και 3.16).

- (i) Δείξτε ότι $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ και $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
- (ii) Δείξτε ότι $\bigcup \emptyset = \bigcup \{\emptyset\} = \emptyset$.

Λύση.

(i) Για την πρώτη ισότητα έχουμε

$$x \in \mathcal{P}(\emptyset) \iff x \subseteq \emptyset \iff x = \emptyset \iff x \in \{\emptyset\}$$

για κάθε x , επομένως από το Αξίωμα της Έκτασης προκύπτει $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Για τη δεύτερη ισότητα έχουμε

$$x \in \mathcal{P}(\{\emptyset\}) \iff x \subseteq \{\emptyset\} \iff x = \emptyset \vee x = \{\emptyset\} \iff x \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

για κάθε x . Πάλι από το Αξίωμα της Έκτασης προκύπτει η ζητούμενη ισότητα.

(ii) Αν υπήρχε $x \in \bigcup \emptyset$ τότε θα υπήρχε ένα σύνολο A με τις ιδιότητες $A \in \emptyset$ και $x \in A$. Αυτό είναι άτοπο γιατί το κενό σύνολο \emptyset δεν περιέχει στοιχεία. Άρα $\bigcup \emptyset = \emptyset$.

Αν υπήρχε $x \in \bigcup \{\emptyset\}$ τότε θα υπήρχε ένα σύνολο A με τις ιδιότητες $A \in \{\emptyset\}$ και $x \in A$. Εφόσον $A \in \{\emptyset\}$ θα ίσχυε $A = \emptyset$ το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το $x \in A$. Άρα $\bigcup \{\emptyset\} = \emptyset$.

Άσκηση 2. Διατυπώστε αυστηρά τα αξιώματα του Δυναμοσυνόλου και της Ένωσης.

Λύση.

Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου:

$$(\forall z)(\exists w) [\text{set}(z) \longrightarrow \{ \text{set}(w) \ \& \ (\forall y)[y \in w \longleftrightarrow (\forall t)[t \in y \longrightarrow t \in z]] \}].$$

Εξήγηση: Αν έχουμε ένα σύνολο z τότε υπάρχει ένα σύνολο w (το δυναμοσύνολο του z) με την ιδιότητα τα στοιχεία του w να είναι ακριβώς όλα τα y που ικανοποιούν $y \subseteq z$. Με άλλα λόγια το w είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του z .

Αξίωμα της Ένωσης:

$$(\forall z)(\exists w) [\text{set}(z) \longrightarrow \{ \text{set}(w) \ \& \ (\forall x)[x \in w \longleftrightarrow (\exists y)[y \in z \ \& \ x \in y]] \}].$$

Εξήγηση: Αν έχουμε ένα σύνολο z τότε υπάρχει ένα σύνολο w (η ένωση του z) με την ιδιότητα τα στοιχεία του w να είναι ακριβώς όλα τα x που ικανοποιούν $x \in y$ για κάποιο $y \in z$.

Άσκηση 3. Δίνονται αντικείμενα x, y, a, b . Αποδείξτε με βάση τα αξιώματα ότι υπάρχει μοναδικό σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι ακριβώς τα x, y, a, b .

Λύση.

Από το Αξίωμα του Ζεύγους υπάρχουν τα σύνολα $\{x, y\}$ και $\{a, b\}$. Με μία ακόμα εφαρμογή του Αξιώματος του Ζεύγους υπάρχει το σύνολο $\mathcal{E} = \{\{x, y\}, \{a, b\}\}$ και από το Αξίωμα της Ένωσης υπάρχει το σύνολο $\bigcup \mathcal{E}$.

Τότε για κάθε t ,

$$\begin{aligned} t \in \bigcup \mathcal{E} &\iff (\exists z)[z \in \mathcal{E} \ \& \ t \in z] \\ &\iff t \in \{x, y\} \vee t \in \{a, b\} \\ &\iff t = x \vee t = y \vee t = a \vee t = b. \end{aligned}$$

Δηλαδή τα στοιχεία του $\bigcup \mathcal{E}$ είναι ακριβώς τα αντικείμενα x, y, a, b . Από το Αξίωμα της Έκτασης το $\bigcup \mathcal{E}$ είναι το μοναδικό σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι ακριβώς αυτά τα αντικείμενα.

Άσκηση 4 (Πρόβλημα x3.2). Δίνονται σύνολα A και B . Εξετάστε με βάση τα αξιώματα αν υπάρχουν σύνολα X_1, X_2, X_3 και X_4 με τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{aligned} z \in X_1 &\iff (\exists x \in A)[z = \{\emptyset, x\}] \\ z \in X_2 &\iff \text{set}(z) \ \& \ z \neq \emptyset \\ z \in X_3 &\iff (\exists x \in A)(\exists y \in B)[z = \{x, y\}] \\ z \in X_4 &\iff (\exists X)[X \subseteq A \ \& \ z = \mathcal{P}(X)] \end{aligned}$$

όπου το z είναι αντικείμενο του κόσμου \mathcal{W} .

Υπόδειξη: Όπου δείχνετε ότι ορίζεται σύνολο εφαρμόστε το Αξίωμα Διαχωρισμού σε κατάλληλο σύνολο Y και κατάλληλη οριστική συνθήκη P .

Λύση.

Υπάρχει τέτοιο σύνολο X_1 . Παρατηρούμε πως αν $x \in A$ τότε $\{\emptyset, x\} \subseteq A \cup \{\emptyset\}$ και άρα $\{\emptyset, x\} \in \mathcal{P}(A \cup \{\emptyset\})$. Άρα πρέπει να πάρουμε το σύνολο όλων των $z \in \mathcal{P}(A \cup \{\emptyset\})$ με την ιδιότητα $z = \{\emptyset, x\}$ για κάποιο $x \in A$, δηλαδή

$$X_1 = \{z \in \mathcal{P}(A \cup \{\emptyset\}) \mid \exists x \in A(z = \{\emptyset, x\})\}.$$

(Σχόλιο: Η συνθήκη $P(z) \iff \exists x \in A(z = \{\emptyset, x\})$ είναι οριστική, καθώς

$$P(z) \iff \exists x \forall t (t \in z \iff t = \emptyset \vee t = x).$$

Θα αποφεύγουμε όμως να αναλύουμε σε τόσο βάθος ότι μια συνθήκη είναι οριστική.)

Αφού τα $A, \{\emptyset\}$ είναι σύνολα, τότε από τα Αξιώματα της Ένωσης και του Δυναμοσυνόλου το $\mathcal{P}(A \cup \{\emptyset\})$ είναι επίσης σύνολο. Από το Αξίωμα Διαχωρισμού το X_1 είναι σύνολο. Σύμφωνα με τα πιο πάνω το X_1 ικανοποιεί τη ζητούμενη ισοδυναμία.

Δεν υπάρχει τέτοιο σύνολο X_2 . Αν υπήρχε, τότε από το Αξίωμα του Ζεύγους θα είχαμε το σύνολο $\mathcal{E} = \{X_2, \{\emptyset\}\}$ και από το Αξίωμα της Ένωσης θα είχαμε το σύνολο $X_2 \cup \{\emptyset\}$. Τότε θα ίσχυε

$$\text{set}(z) \iff [\text{set}(z) \ \& \ z \neq \emptyset] \vee z = \emptyset \iff z \in X_2 \vee z = \emptyset \iff z \in X_2 \cup \{\emptyset\}$$

για κάθε z . Επομένως το $X_2 \cup \{\emptyset\}$ θα ήταν το σύνολο όλων των συνόλων, που όπως ξέρουμε από το μάθημα αυτό είναι άτοπο.

Υπάρχει τέτοιο σύνολο X_3 . Όπως και στο X_1 η παρατήρηση είναι πως αν $x \in A$ και $y \in B$ τότε $\{x, y\} \subseteq A \cup B$, δηλαδή $\{x, y\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Άρα από το Αξίωμα Διαχωρισμού ορίζεται το σύνολο

$$X_3 = \{z \in \mathcal{P}(A \cup B) \mid \exists x \exists y (x \in A \ \& \ y \in B \ \& \ z = \{x, y\})\}.$$

Σύμφωνα με την πιο πάνω παρατήρηση το X_3 ικανοποιεί τη ζητούμενη ισοδυναμία.

Τέλος υπάρχει τέτοιο σύνολο X_4 . Παρατηρούμε πως αν $z = \mathcal{P}(X)$ για κάποιο $X \subseteq A$, τότε $z = \mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(A)$ και άρα $z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. Εφαρμόζοντας δύο φορές το Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου το $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ είναι σύνολο. Επομένως από το Αξίωμα Διαχωρισμού ορίζεται το σύνολο

$$X_4 = \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \mid \exists x (x \subseteq A \ \& \ z = \mathcal{P}(x))\}.$$

Σύμφωνα με όσα είπαμε το σύνολο X_4 ικανοποιεί τη ζητούμενη ισοδυναμία.

Άσκηση 5 (Πρόβλημα x3.1 - Παραλλαγή). Δείξτε από τα αξιώματα ότι για κάθε σύνολο $\mathcal{E} \neq \emptyset$ υπάρχει ένα σύνολο I έτσι ώστε για κάθε x ,

$$x \in I \iff (\forall A \in \mathcal{E})[x \in A].$$

Δηλαδή τα στοιχεία του I είναι τα αντικείμενα που είναι στοιχεία κάθε μέλους του \mathcal{E} . Εξηγήστε γιατί το I είναι μοναδικό.

Σχόλιο: Αυτό το μοναδικό σύνολο I ονομάζεται *τομή του \mathcal{E}* και συμβολίζεται με $\bigcap \mathcal{E}$. Στην περίπτωση όπου $\mathcal{E} = \{A, B\}$ για κάποια σύνολα A, B συμβολίζουμε την τομή $\bigcap \mathcal{E}$ με $A \cap B$.

Σε απόμεινη άσκηση δείχνουμε ότι είναι ουσιαστικό να θεωρήσουμε πως $\mathcal{E} \neq \emptyset$ για να ορίσουμε την τομή $\bigcap \mathcal{E}$.

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι κάθε στοιχείο της τομής του \mathcal{E} πρέπει να ανήκει και στην ένωση του \mathcal{E} που γνωρίζουμε ότι είναι σύνολο από το Αξίωμα της Ένωσης.

Λύση.

Πρώτα παρατηρούμε ότι το $\bigcup \mathcal{E}$ είναι σύνολο από το Αξίωμα της Ένωσης. Επομένως από το Αξίωμα Διαχωρισμού το

$$I = \{x \in \bigcup \mathcal{E} \mid (\forall A \in \mathcal{E})[x \in A]\}$$

είναι επίσης σύνολο.

Δείχνουμε ότι το I ικανοποιεί τη ζητούμενη ισοδυναμία. Έστω $x \in I$, από τον ορισμό του I έχουμε ειδικότερα ότι $(\forall A \in \mathcal{E})[x \in A]$.

Αντίστροφα θεωρούμε ένα x που ικανοποιεί $(\forall A \in \mathcal{E})[x \in A]$. (Παρατηρήστε ότι τότε αναγκαστικά το \mathcal{E} αποτελείται από σύνολα.) Από τον ορισμό του I αρκεί να δείξουμε ότι $x \in \bigcup \mathcal{E}$. Εφόσον $\mathcal{E} \neq \emptyset$ υπάρχει $A \in \mathcal{E}$, και από την υπόθεσή μας για το x θα έχουμε ειδικότερα ότι $x \in A$. Είναι προφανές ότι $A \subseteq \bigcup \mathcal{E}$ επομένως $x \in \bigcup \mathcal{E}$.

Τέλος εξηγούμε γιατί ένα τέτοιο σύνολο I είναι μοναδικό. Αν έχουμε ένα άλλο σύνολο I' που ικανοποιεί την ιδιότητα $x \in I' \iff (\forall A \in \mathcal{E})[x \in A]$ για κάθε x , τότε προφανώς $x \in I \iff x \in I'$ για κάθε x , δηλαδή τα I και I' έχουν τα ίδια στοιχεία. Από το Αξίωμα της Έκτασης προκύπτει $I = I'$.

Άσκηση 6.

- (i) Δείξτε ότι ο κόσμος \mathcal{W} δεν είναι σύνολο.
- (ii) Υπάρχει σύνολο I με την ιδιότητα $x \in I$ για κάθε x ;
- (iii) Υπάρχει σύνολο I με την ιδιότητα

$$x \in I \iff (\forall A \in \emptyset)[x \in A];$$

Λύση.

(i) Αν ο κόσμος \mathcal{W} ήταν σύνολο τότε από το Αξίωμα Διαχωρισμού θα υπήρχε το σύνολο

$$V = \{x \in \mathcal{W} \mid \text{set}(x)\}$$

δηλαδή θα υπήρχε το σύνολο όλων των συνόλων, άτοπο.

Αλλιώς μπορεί κανείς να δείξει το ζητούμενο κατευθείαν ως εξής. Αν ο κόσμος \mathcal{W} ήταν σύνολο τότε από το Αξίωμα Διαχωρισμού θα υπήρχε το σύνολο

$$r(\mathcal{W}) = \{x \in \mathcal{W} \mid x \notin x\}.$$

Αλλά γνωρίζουμε ότι $r(A) \notin A$ για κάθε σύνολο A , επομένως θα είχαμε $r(\mathcal{W}) \notin \mathcal{W}$ που είναι άτοπο γιατί το $r(\mathcal{W})$ -ως σύνολο- θα ήταν αντικείμενο του κόσμου \mathcal{W} .

(ii) Υποθέτουμε προς άτοπο ότι υπάρχει σύνολο I με την ιδιότητα $x \in I$ για κάθε x . (Προσοχή: Δεν μπορούμε να συμπεράνουμε από το Αξίωμα της Έκτασης ότι $\mathcal{W} = I$ γιατί αυτό το αξίωμα αναφέρεται σε σύνολα και ο κόσμος \mathcal{W} δεν είναι σύνολο.)

Θεωρούμε το σύνολο $r(I) = \{y \in I \mid y \notin y\}$. Τότε το $x = r(I)$ ανήκει στον κόσμο \mathcal{W} αλλά όπως έχουμε αποδείξει δεν ανήκει στο I , κάτι που αντιβαίνει στην υπόθεσή μας για το I .

(iii) Αν $\mathcal{E} = \emptyset$ ισχυριζόμαστε ότι για κάθε x ισχύει

$$(\forall A \in \mathcal{E})[x \in A].$$

Για να το δούμε αυτό θεωρούμε την άρνηση της προηγούμενης πρότασης,

$$(\exists A \in \mathcal{E})[x \notin A],$$

η οποία δεν ισχύει για κανένα x αφού το $\mathcal{E} = \emptyset$ δεν περιέχει στοιχεία. Εφόσον η άρνηση της πρότασης δεν ισχύει για κανένα x , η πρόταση θα ισχύει για όλα τα x .

Τώρα αν υπήρχε σύνολο I με την ιδιότητα

$$x \in I \iff (\forall A \in \emptyset)[x \in A]$$

για κάθε x , τότε αφού το δεύτερο μέρος της ισοδυναμίας ισχύει πάντα, θα είχαμε $x \in I$ για κάθε x , που αντιβαίνει στο (ii).