

Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών



3ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
B. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Ασκήσεις 3.13 και 3.16).

- (i) Δείξτε ότι $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ και $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
- (ii) Δείξτε ότι $\bigcup \emptyset = \bigcup \{\emptyset\} = \emptyset$.

Άσκηση 2. Διατυπώστε αυστηρά τα αξιώματα του Δυναμοσυνόλου και της Ένωσης.

Άσκηση 3. Δίνονται αντικείμενα x, y, a, b . Αποδείξτε με βάση τα αξιώματα ότι υπάρχει μοναδικό σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι ακριβώς τα x, y, a, b .

Άσκηση 4 (Πρόβλημα x3.2). Δίνονται σύνολα A και B . Εξετάστε με βάση τα αξιώματα αν υπάρχουν σύνολα X_1, X_2, X_3 και X_4 με τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{aligned}z \in X_1 &\iff (\exists x \in A)[z = \{\emptyset, x\}] \\z \in X_2 &\iff \text{set}(z) \ \& \ z \neq \emptyset \\z \in X_3 &\iff (\exists x \in A)(\exists y \in B)[z = \{x, y\}] \\z \in X_4 &\iff (\exists X)[X \subseteq A \ \& \ z = \mathcal{P}(X)]\end{aligned}$$

όπου το z είναι αντικείμενο του κόσμου \mathcal{W} .

Υπόδειξη: Όπου δείχνετε ότι ορίζεται σύνολο εφαρμόστε το Αξίωμα Διαχωρισμού σε κατάλληλο σύνολο Y και κατάλληλη οριστική συνθήκη P .

Άσκηση 5 (Πρόβλημα x3.1 - Παραλλαγή). Δείξτε από τα αξιώματα ότι για κάθε σύνολο $\mathcal{E} \neq \emptyset$ υπάρχει ένα σύνολο I έτσι ώστε για κάθε x ,

$$x \in I \iff (\forall A \in \mathcal{E})[x \in A].$$

Δηλαδή τα στοιχεία του I είναι τα αντικείμενα που είναι στοιχεία κάθε μέλους του \mathcal{E} . Εξηγήστε γιατί το I είναι μοναδικό.

Σχόλιο: Αυτό το μοναδικό σύνολο I ονομάζεται *τομή του \mathcal{E}* και συμβολίζεται με $\bigcap \mathcal{E}$. Στην περίπτωση όπου $\mathcal{E} = \{A, B\}$ για κάποια σύνολα A, B συμβολίζουμε την τομή $\bigcap \mathcal{E}$ με $A \cap B$.

Σε απόμενη άσκηση δείχνουμε ότι είναι ουσιαστικό να θεωρήσουμε πως $\mathcal{E} \neq \emptyset$ για να ορίσουμε την τομή $\bigcap \mathcal{E}$.

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι κάθε στοιχείο της τομής του \mathcal{E} πρέπει να ανήκει και στην ένωση του \mathcal{E} που γνωρίζουμε ότι είναι σύνολο από το Αξίωμα της Ένωσης.

Άσκηση 6.

- (i) Δείξτε ότι ο κόσμος \mathcal{W} δεν είναι σύνολο.
- (ii) Υπάρχει σύνολο I με την ιδιότητα $x \in I$ για κάθε x ;
- (iii) Υπάρχει σύνολο I με την ιδιότητα

$$x \in I \iff (\forall A \in \emptyset)[x \in A];$$