Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

1ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Πρόβλημα x1.2 - Οι νόμοι του De Morgan)**.**
Δείξτε ότι για όλα τα σύνολα A, B, C ισχύει

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$
$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B).$$

Άσκηση 2 (Πρόβλημα x1.3)**.** Δείξτε ότι για κάθε συνάρτηση $f : X \to Y$ και κάθε $A, B \subseteq X$ ισχύουν

$$f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$$
$$f[A \setminus B] \supseteq f[A] \setminus f[B].$$

Αν η f είναι 1-1 δείξτε ότι οι πιο πάνω εγκλεισμοί είναι ισότητες. Βρείτε επίσης παραδείγματα όπου οι ισότητες δεν ισχύουν αν η f δεν είναι 1-1.

Άσκηση 3 (Πρόβλημα x1.4 plus)**.** Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : X \to Y$ και $A, B \subseteq Y$. Δείξτε ότι

$$f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$$
$$f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$$
$$f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B].$$

Αν $C, D \subseteq X$ δείξτε ότι

$$f[C \cup D] = f[C] \cup f[D].$$

Άσκηση 4. Δίνεται ένα άπειρο σύνολο A, $a_0, \dots, a_n \in A$, και ένας επιμορφισμός $\pi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$. Δείξτε ότι υπάρχει $m > n$ με $\pi(m) \notin \{a_0, \dots, a_n\}$.

Άσκηση 5. Για κάθε σύνολα A, B ισχύουν τα εξής:

(i) Αν $A \leq_c B$ και το B είναι αριθμήσιμο τότε και το A είναι αριθμήσιμο.

(ii) Αν υπάρχει επιμορφισμός $\tau : B \twoheadrightarrow A$ και το B είναι αριθμήσιμο τότε και το A είναι αριθμήσιμο.

Άσκηση 6. Για κάθε σύνολα A, B με $A \neq \emptyset$ αν ισχύει $A \leq_c B$ τότε υπάρχει συνάρτηση $\pi : B \twoheadrightarrow A$ επί. Μάλιστα αν $\tau : A \rightarrowtail B$ είναι μονομορφισμός τότε ο επιμορφισμός π μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε $\pi(\tau(x)) = x$ για κάθε $x \in A$.

Σχόλιο: Είναι γνωστό ότι για κάθε σύνολα A, B με $A \neq \emptyset$ ισχύει

$$A \leq_c B \iff \text{υπάρχει επιμορφισμός } \pi : B \twoheadrightarrow A.$$

Αυτή η άσκηση δείχνει την ευθεία κατεύθυνση της πιο πάνω ισοδυναμίας. Για την αντίστροφη κατεύθυνση χρειαζόμαστε το Αξίωμα Επιλογής στο οποίο θα αναφερθούμε αργότερα.

Άσκηση 7. Αν $A =_c B$ δείξτε ότι $\mathcal{P}(A) =_c \mathcal{P}(B)$, όπου $\mathcal{P}(X)$ είναι το **δυναμοσύνολο** του X,

$$\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}.$$

Συμπεράνετε ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Z}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.