Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

5ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Άσκηση 4.4 plus σελ. 39)**.**

(i) Αν $(x, y, z) = (x', y', z')$ δείξτε ότι $x = x'$, $y = y'$ και $z = z'$.

(ii) Δίνονται σύνολα A, B και C. Εξηγήστε γιατί το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B \times C$ είναι σύνολο.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε αυτά που ξέρετε για τα ζεύγη αντικειμένων και το καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων.

Λύση.

(i) Έχουμε

$$(x, y, z) = (x, (y, z)) = (x', (y, z')) = (x', y', z').$$

Τότε $x = x'$ και $(y, z) = (y', z')$. Από το τελευταίο προκύπτει $y = y'$ και $z = z'$.

(ii) Γνωρίζουμε ότι το καρτεσιανό γινόμενο $X_1 \times X_2$ δύο συνόλων X_1 και X_2 είναι σύνολο. Επομένως έχουμε τα σύνολα $B \times C$ και $A \times (B \times C) = A \times B \times C$.

Άσκηση 2 (Κατασκευή συστήματος φυσικών αριθμών από δοσμένο σύστημα)**.** Θεωρούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$, ένα σύνολο $\mathbb{N}_2$ και μια $1-1$ και επί συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{N}_2$. Δείξτε ότι υπάρχουν $0_2 \in \mathbb{N}_2$ και $S_2 : \mathbb{N}_2 \to \mathbb{N}_2$ έτσι ώστε η τριάδα $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ να είναι σύστημα φυσικών αριθμών.

Λύση.

Ορίζουμε $0_2 = \pi(0_1) \in \mathbb{N}_2$ και $S_2 m = \pi(S_1 \pi^{-1}(m))$, $m \in \mathbb{N}_2$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}_1 \arrow[r, "\pi"'] \arrow[d, "S_1"'] & \mathbb{N}_2 \arrow[l, bend right, "\pi^{-1}"'] \arrow[d, dashed, "S_2"] \\
\mathbb{N}_1 \arrow[r, "\pi"'] & \mathbb{N}_2
\end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε ότι η S_2 είναι καλά ορισμένη αφού η π είναι $1-1$ και επί. Η S_2 είναι $1-1$ ως σύνθεση $1-1$ συναρτήσεων.

Αν είχαμε $S_2 m = 0_2$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}_2$ τότε θα είχαμε

$$\pi(0_1) = 0_2 = S_2 m = \pi(S_1 \pi^{-1}(m))$$

και αφού η π είναι $1-1$ προκύπτει $0_1 = S_1 \pi^{-1}(m)$. Επομένως το 0_1 θα ανήκε στην εικόνα της S_1 που είναι άτοπο. Άρα $S_2 m \neq 0$ για κάθε $m \in \mathbb{N}_2$.

Τέλος δείχνουμε την Αρχή της Επαγωγής στο $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$. Έστω $Y \subseteq \mathbb{N}_2$ με $0_2 \in Y$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}_2$ αν $m \in Y$ τότε $S_2 m \in Y$. Θεωρούμε το σύνολο $X = \pi^{-1}[Y]$. Αφού $\pi(0_1) = 0_2 \in Y$ έχουμε $0_1 \in X$.

Έστω $n \in X$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}_1$. Τότε $\pi(n) \in Y$ και από την υπόθεσή μας για το σύνολο Y έχουμε ότι $S_2 \pi(n) \in Y$. Αλλά $S_2 \pi(n) = \pi(S_1 \pi^{-1}(\pi(n))) = \pi(S_1 n)$. Άρα $\pi(S_1 n) \in Y$ που σημαίνει ότι $S_1 n \in X$. Με άλλα λόγια δείξαμε για κάθε $n \in \mathbb{N}_1$,

$$n \in X \implies S_1 n \in X.$$

Από την Αρχή της Επαγωγής στο σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ έχουμε $\pi^{-1}[Y] = X = \mathbb{N}_1$. Εφόσον η π είναι επί προκύπτει ότι $Y = \mathbb{N}_2$ και επομένως η Αρχή της Επαγωγής ισχύει για την τριάδα $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$.

Προκύπτει από τα πιο πάνω ότι η τριάδα $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ είναι σύστημα φυσικών αριθμών.

Άσκηση 3. Θεωρούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}, 0, S)$, ένα σύνολο X, ένα στοιχείο $x_0 \in X$ και μια συνάρτηση $g : X \to X$. Δείξτε τα εξής:

(i) Υπάρχει μια ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με τις ιδιότητες $A_0 = \{x_0\}$ και $A_{Sn} = g[A_n]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Υπάρχει ένα **αριθμήσιμο** σύνολο B με την ιδιότητες $x_0 \in B$ και αν $x \in B$ τότε $g(x) \in B$.

Λύση.

(i) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Αναδρομής στο σύνολο $E = \mathcal{P}(X)$ με $a = \{x_0\}$ και $h : E \to E : A \mapsto g[A]$. Από το Θεώρημα Αναδρομής υπάρχει μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ με $f(0) = a = \{x_0\}$ και $f(Sn) = h(f(n)) = g[f(n)]$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε παίρνουμε $A_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ και έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Θεωρούμε την πιο πάνω ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και παίρνουμε $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Προφανώς $x_0 \in A_0 \subseteq B$, άρα $x_0 \in B$. Αν $x \in B$ τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $x \in A_n$ και άρα $g(x) \in g[A_n] = A_{Sn} \subseteq B$, επομένως $g(x) \in B$.

Τέλος δείχνουμε ότι το B είναι αριθμήσιμο. Από γνωστό θεώρημα (αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων συνόλων) αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο A_n είναι αριθμήσιμο. Για την ακρίβεια δείχνουμε ότι κάθε A_n είναι μονοσύνολο.

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή. Για $n = 0$ έχουμε $A_0 = \{x_0\}$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο A_n είναι μονοσύνολο, $A_n = \{a\}$. Τότε $A_{Sn} = g[A_n] = g[\{a\}] = \{g(a)\}$ και επομένως το A_{Sn} είναι μονοσύνολο.

Σχόλιο: Το σύνολο B που κατασκευάζεται με τον πιο πάνω τρόπο αποτελείται από τα στοιχεία x_0, $g(x_0)$, $g(g(x_0))$, …, και συνήθως αποκαλείται η **τροχιά** του x_0 ως προς τη συνάρτηση g.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι

$$Sn = n + 1 = 1 + n \quad \text{και} \quad n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ χωρίς να επικαλεστείτε την αντιμεταθετική ιδιότητα των πράξεων. Στις ισότητες που αφορούν τον πολλαπλασιασμό μπορείτε να πάρετε δεδομένο ότι $0 + n = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Λύση.

Αρχικά έχουμε

$$n + 1 = n + S0 = S(n + 0) = Sn$$

όπου στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του 1 και στις άλλες δύο τον ορισμό της πρόσθεσης. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι $1 + n = Sn$ με επαγωγή στο n.

Για $n = 0$ έχουμε $1 + 0 = 1 = S0$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο n ισχύει $1 + n = Sn$ και δείχνουμε ότι $1 + Sn = S(Sn)$. Πράγματι

$$\begin{aligned}
1 + Sn &= S(1 + n) && \text{(ορισμός πρόσθεσης)}\\
&= S(n + 1) && \text{(Επαγωγική Υπόθεση)}\\
&= S(Sn) && \text{(γιατί } Sn = n + 1)\\
&= Sn + 1 && \text{(εφαρμόζουμε } Sm = m + 1 \text{ για } m = Sn).
\end{aligned}$$

Σχετικά με το δεύτερο ζητούμενο παρατηρούμε πρώτα ότι $n \cdot 1 = n \cdot S0 = n \cdot 0 + n = 0 + n = n$ από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού και τις ιδιότητες της πρόσθεσης.

Τέλος αποδεικνύουμε την ισότητα $1 \cdot n = n$ με επαγωγή στο n. Για $n = 0$ έχουμε από τον ορισμό,

$$1 \cdot 0 = 0 = n.$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $1 \cdot n = n$. Τότε

$$\begin{aligned}
1 \cdot Sn &= 1 \cdot n + 1 && \text{(εξ ορισμού)}\\
&= n + 1 && \text{(Επαγωγική Υπόθεση)}\\
&= Sn && \text{(από την πρώτη ισότητα).}
\end{aligned}$$

Άσκηση 5 (Πρόβλημα x5.1)**.** Δείξτε ότι ο πολλαπλασιασμός στους φυσικούς αριθμούς είναι προσεταιριστική πράξη, δηλαδή για κάθε n, m, k έχουμε

$$(n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k).$$

Λύση.
Με επαγωγή στο k. Για $k = 0$ έχουμε

$$(n \cdot m) \cdot 0 = 0 \quad \text{και} \quad n \cdot (m \cdot 0) = n \cdot 0 = 0,$$

για κάθε n, m. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $(n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k)$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Δείχνουμε ότι

$$(n \cdot m) \cdot Sk = n \cdot (m \cdot Sk)$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Έστω $n, m \in \mathbb{N}$, τότε

$$\begin{aligned}(n \cdot m) \cdot Sk &= (n \cdot m) \cdot k + (n \cdot m) \quad \text{(εξ ορισμού)}\\ &= n \cdot (m \cdot k) + (n \cdot m) \quad \text{(Επαγωγική Υπόθεση).}\end{aligned}$$

Από την άλλη

$$\begin{aligned}n \cdot (m \cdot Sk) &= n \cdot ((m \cdot k) + m) \quad \text{(εξ ορισμού)}\\ &= n \cdot (m \cdot k) + (n \cdot m) \quad \text{(επιμεριστική ιδιότητα).}\end{aligned}$$

Άρα

$$(n \cdot m) \cdot Sk = n \cdot (m \cdot k) + (n \cdot m) = n \cdot (m \cdot Sk)$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 6 (Πρόβλημα x5.3)**.** Η πράξη της ύψωσης σε δύναμη ορίζεται με αναδρομή στο m,

$$\begin{aligned}n^0 &= 1,\\ n^{Sm} &= n^m \cdot n,\end{aligned}$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ με $n \neq 0$.

Δείξτε ότι για κάθε n, m, k έχουμε

$$\begin{aligned}n^{m+k} &= n^m \cdot n^k,\\ n^{m \cdot k} &= \left(n^m\right)^k.\end{aligned}$$

Λύση.
Δείχνουμε και τις δύο ισότητες με επαγωγή στο k. Στην πρώτη έχουμε για $k = 0$,

$$n^{m+k} = n^{m+0} = n^m = n^m \cdot 1 = n^m \cdot n^0 = n^m \cdot n^k$$

για κάθε m, n με $n \neq 0$, όπου στην ισότητα $n^m = n^m \cdot 1$ χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του πολλαπλασιασμού.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο k ισχύει $n^{m+k} = n^m \cdot n^k$, για κάθε m, n με $n \neq 0$. Δείχνουμε ότι

$$n^{m+Sk} = n^m \cdot n^{Sk}$$

για κάθε m, n με $n \neq 0$. Έστω $m, n \in \mathbb{N}$ με $n \neq 0$. Τότε

$$\begin{aligned}n^{m+Sk} &= n^{S(m+k)} \quad \text{(ορισμός πρόσθεσης)}\\ &= n^{m+k} \cdot n \quad \text{(ορισμός ύψωσης σε δύναμη)}\\ &= (n^m \cdot n^k) \cdot n \quad \text{(Επαγωγική Υπόθεση)}\\ &= n^m \cdot (n^k \cdot n) \quad \text{(προσεταιρισμός πολλαπλασιασμού)}\\ &= n^m \cdot n^{Sk} \quad \text{(ορισμός ύψωσης σε δύναμη)}\end{aligned}$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Σχετικά με τη δεύτερη ισότητα κάνουμε πρώτα το εξής σχόλιο. Εφόσον έχουμε ορίσει την ύψωση σε δύναμη n^m για $n \neq 0$, για να έχει νόημα η έκφραση $(n^m)^k$ θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι $n^m \neq 0$ για κάθε m, n με $n \neq 0$. Αυτό αποδεικνύεται σχετικά εύκολα και το παίρνουμε δεδομένο σε αυτή την άσκηση.

Για $k = 0$ έχουμε,

$$n^{m \cdot k} = n^{m \cdot 0} = n^0 = 1 = (n^m)^0 = \left(n^m\right)^k,$$

για κάθε m, n με $n \neq 0$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο k ισχύει $n^{m \cdot k} = (n^m)^k$, για κάθε m, n με $n \neq 0$. Δείχνουμε ότι

$$n^{m \cdot Sk} = (n^m)^{Sk}.$$

Έστω $m, n \in \mathbb{N}$ με $n \neq 0$. Τότε

$$\begin{aligned} n^{m \cdot Sk} &= n^{m \cdot k + m} \quad \text{(ορισμός πολλαπλασιασμού)} \\ &= n^{m \cdot k} \cdot n^m \quad \text{(από την πρώτο ζητούμενο της άσκησης)} \\ &= (n^m)^k \cdot n^m \quad \text{(Επαγωγική Υπόθεση)} \\ &= (n^m)^{Sk} \quad \text{(ορισμός ύψωσης σε δύναμη)} \end{aligned}$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 7 (Πρόβλημα x5.4)**.** Θεωρούμε δύο συστήματα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ και $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$, και τη μοναδική συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ με

$$\begin{aligned} \pi(0_1) &= 0_2 \\ \pi(S_1 n) &= S_2 \pi(n), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Σε κάθε σύστημα φυσικών αριθμών ορίζονται οι αντίστοιχες πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού: $+_1$, $\cdot_1$ και $+_2$, $\cdot_2$.

Δείξτε ότι η π είναι ομοιομορφισμός ως προς αυτές τις πράξεις, δηλαδή για κάθε $n, m \in \mathbb{N}_1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \pi(n +_1 m) &= \pi(n) +_2 \pi(m) \\ \pi(n \cdot_1 m) &= \pi(n) \cdot_2 \pi(m). \end{aligned}$$

Λύση.

Δείχνουμε και τις δύο ισότητες με επαγωγή στο $m \in \mathbb{N}_1$. Στην πρώτη για $m = 0_1$ έχουμε

$$\pi(n +_1 m) = \pi(n +_1 0_1) = \pi(n) = \pi(n) +_2 0_2 = \pi(n) +_2 \pi(0_1) = \pi(n) +_2 \pi(m),$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}_1$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $m \in \mathbb{N}_1$ ισχύει $\pi(n +_1 m) = \pi(n) +_2 \pi(m)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}_1$. Δείχνουμε ότι

$$\pi(n +_1 S_1 m) = \pi(n) +_2 \pi(S_1 m)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}_1$. Έστω $n \in \mathbb{N}_1$, τότε

$$\begin{aligned} \pi(n +_1 S_1 m) &= \pi(S_1(n +_1 m)) \quad \text{(ορισμός πρόσθεσης } +_1\text{)} \\ &= S_2 \pi(n +_1 m) \quad \text{(ιδιότητες } \pi\text{)} \\ &= S_2(\pi(n) +_2 \pi(m)) \quad \text{(Επαγωγική Υπόθεση)} \\ &= \pi(n) +_2 S_2 \pi(m) \quad \text{(ορισμός πρόσθεσης } +_2\text{)} \\ &= \pi(n) +_2 \pi(S_1 m) \quad \text{(ιδιότητες } \pi\text{)} \end{aligned}$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Στη δεύτερη ισότητα έχουμε για $m = 0_1$,

$$\pi(n \cdot_1 m) = \pi(n \cdot_1 0_1) = \pi(0_1) = 0_2 = \pi(n) \cdot_2 0_2 = \pi(n) \cdot_2 \pi(0_1) = \pi(n) \cdot_2 \pi(m)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}_1$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $m \in \mathbb{N}_1$ ισχύει $\pi(n \cdot_1 m) = \pi(n) \cdot_2 \pi(m)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}_1$. Δείχνουμε ότι

$$\pi(n \cdot_1 S_1 m) = \pi(n) \cdot_2 \pi(S_1 m)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}_1$. Έστω $n \in \mathbb{N}_1$, τότε

$$\begin{aligned} \pi(n \cdot_1 S_1 m) &= \pi(n \cdot_1 m +_1 n) \quad \text{(ορισμός πολλαπλασιασμού } \cdot_1\text{)} \\ &= \pi(n \cdot_1 m) +_2 \pi(n) \quad \text{(από το πρώτο ζητούμενο)} \\ &= \pi(n) \cdot_2 \pi(m) +_2 \pi(n) \quad \text{(Επαγωγική Υπόθεση)} \\ &= \pi(n) \cdot_2 S_2 \pi(m) \quad \text{(ορισμός πολλαπλασιασμού } \cdot_2\text{)} \\ &= \pi(n) \cdot_2 \pi(S_1 m) \quad \text{(ιδιότητες } \pi\text{)} \end{aligned}$$

και έχουμε το ζητούμενο.