Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

3ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1.

(i) Ορίστε μια 1-1 και επί συνάρτηση $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrowtail\mkern-14mu\twoheadrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(ii) Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένο γινόμενο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \cdots \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$.

Άσκηση 2 (Άσκηση 2.23 plus)**.** Αν $A_1 \leq_c A_2$ και αν $B_1 \leq_c B_2$ δείξτε ότι

$$(A_1 \to B_1) \leq_c (A_2 \to B_2)$$

Με χρήση του συμβολισμού $(A \to B) \equiv B^A$ το παραπάνω γράφεται ως εξής:

$$B_1^{A_1} \leq_c B_2^{A_2}.$$

Συμπεράνετε το ζητούμενο της Άσκησης 2.23 του βιβλίου:

Αν $A_1 =_c A_2$ και αν $B_1 =_c B_2$ τότε $(A_1 \to B_1) =_c (A_2 \to B_2)$ ή αλλιώς $B_1^{A_1} =_c B_2^{A_2}$.

Υπόδειξη: Για το πρώτο ζητούμενο θεωρήστε μια 1-1 συνάρτηση $\tau : A_1 \rightarrowtail A_2$ και (με εφαρμογή γνωστής άσκησης) μια συνάρτηση $\pi : A_2 \twoheadrightarrow A_1$ με $\pi(\tau(a_1)) = a_1$ για κάθε $a_1 \in A_1$.

Άσκηση 3 (Πρόβλημα x2.7)**.** Δείξτε ότι

$$(A \times B \to C) =_c (A \to (B \to C)).$$

Με τον άλλο συμβολισμό:

$$C^{A \times B} =_c (C^B)^A.$$

Άσκηση 4 (Προβλήματα x2.5 και x2.6)**.** Δείξτε ότι

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}.$$

Συμπεράνετε ότι όλα τα πιο πάνω είναι ισότητες κατά Cantor.

Άσκηση 5. Βρείτε με ποια από τα $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ είναι ισοπληθικά τα ακόλουθα σύνολα:

$$\mathbb{R}^n \quad (n \geq 1), \quad \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \quad [0,1]^{\mathbb{R}}, \quad \mathbb{R}^{[0,1]}.$$

Άσκηση 6 (Πρόβλημα x2.9)**.** Δείξτε ότι το σύνολο $C([0,1])$ όλων των **συνεχών** πραγματικών συναρτήσεων στο $[0,1]$ είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Μια συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ καθορίζεται από τις τιμές της στους ρητούς αριθμούς του $[0,1]$.

Άσκηση 7. Δείξτε ότι $\mathbb{R} <_c ([0,1] \to \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{[0,1]} =$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.