Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

2ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1. Δείξτε (με χρήση του Θεωρήματος Schröder-Bernstein) ότι για όλα τα σύνολα A, B, C ισχύουν τα εξής:

(i) $A \not<_c A$.

(ii) Αν $A \leq_c B$ και $B <_c C$ τότε $A <_c C$.

(iii) Αν $A <_c B$ και $B \leq_c C$ τότε $A <_c C$.

Λύση.

(i) Αν $A <_c B$ έχουμε ειδικότερα ότι $A \neq_c B$. Θέτοντας $B = A$ έχουμε ότι αν $A <_c A$ τότε $A \neq_c A$. Επειδή όμως $A =_c A$ (μέσω της ταυτικής συνάρτησης) προκύπτει ότι $A \not<_c A$.

(ii) Είναι σαφές ότι $A \leq_c C$: αν έχουμε μονομορφισμούς $f : A \rightarrowtail B$ και $g : B \rightarrowtail C$ τότε η συνάρτηση $h = g \circ f : A \to C$ είναι επίσης μονομορφισμός.

Αν είχαμε $A =_c C$ από τις σχέσεις $A \leq_c B \leq_c C$ θα προέκυπτε $C \leq_c B \leq_c C$ και από το Θεώρημα Schröder-Bernstein θα είχαμε $B =_c C$ που αντιβαίνει στο $B <_c C$.

(iii) Όμοια με το (ii).

Άσκηση 2. Για κάθε σύνολα A, B ισχύουν τα εξής:

(i) Αν $A \leq_c B$ και το B είναι αριθμήσιμο τότε και το A είναι αριθμήσιμο.

(ii) Αν υπάρχει επιμορφισμός $\tau : B \twoheadrightarrow A$ και το B είναι αριθμήσιμο τότε και το A είναι αριθμήσιμο.

Λύση.

(i) Επειδή το σύνολο B είναι αριθμήσιμο έχουμε $B \leq_c \mathbb{N}$, επομένως $A \leq_c B \leq_c \mathbb{N}$. Προκύπτει ότι $A \leq_c \mathbb{N}$ και άρα το A είναι αριθμήσιμο.

(ii) Αν $A = \emptyset$ τότε το A είναι αριθμήσιμο, επομένως υποθέτουμε ότι $A \neq \emptyset$. Επειδή η τ είναι συνάρτηση από το B στο A έχουμε $B \neq \emptyset$ και εφόσον το B είναι αριθμήσιμο υπάρχει επιμορφισμός $\pi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow B$. Τότε η σύνθεση $\tau \circ \pi : \mathbb{N} \to A$ είναι επιμορφισμός και άρα το A είναι αριθμήσιμο.

Άσκηση 3. Για κάθε σύνολα A, B με $A \neq \emptyset$ αν ισχύει $A \leq_c B$ τότε υπάρχει συνάρτηση $\pi : B \twoheadrightarrow A$ επί. Μάλιστα αν $\tau : A \rightarrowtail B$ είναι μονομορφισμός τότε ο επιμορφισμός π μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε $\pi(\tau(x)) = x$ για κάθε $x \in A$.

Σχόλιο: Είναι γνωστό ότι για κάθε σύνολα A, B με $A \neq \emptyset$ ισχύει

$$A \leq_c B \iff \text{υπάρχει επιμορφισμός } \pi : B \twoheadrightarrow A.$$

Αυτή η άσκηση δείχνει την ευθεία κατεύθυνση της πιο πάνω ισοδυναμίας. Για την αντίστροφη κατεύθυνση χρειαζόμαστε το Αξίωμα Επιλογής στο οποίο θα αναφερθούμε αργότερα.

Λύση.

Θεωρούμε ένα $a_0 \in A$ και ορίζουμε $\pi : B \to A$ ως εξής:

$$\pi(y) = \begin{cases} \tau^{-1}(y), & \text{αν } y \in \tau[A] \\ a_0, & y \notin \tau[A]. \end{cases}$$

Αν $x \in A$ τότε $\pi(\tau(x)) = \tau^{-1}(\tau(x)) = x$. Παρατηρούμε ότι μια τέτοια συνάρτηση π είναι αναγκαστικά επί γιατί το τυχαίο $x \in A$ είναι της μορφής $\pi(y)$ για $y = \tau(x) \in B$.

Άσκηση 4. Αν $A =_c B$ δείξτε ότι $\mathcal{P}(A) =_c \mathcal{P}(B)$, όπου $\mathcal{P}(X)$ είναι το **δυναμοσύνολο** του X,

$$\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}.$$

Συμπεράνετε ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Z}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

Λύση.

Θεωρούμε μια 1-1 και επί συνάρτηση $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow B$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\pi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B) : C \subseteq A \mapsto \{f(x) \mid x \in C\}.$$

Δηλαδή $\pi(C) = f[C]$. Δείχνουμε ότι η π είναι 1-1 και επί.

Για το 1-1 υποθέτουμε ότι $\pi(C_1) = \pi(C_2)$, πρέπει να δείξουμε ότι $C_1 = C_2$. Για κάθε $x \in A$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in C_1 &\iff f(x) \in f[C_1] \quad \text{(γιατί η } f \text{ είναι 1-1)} \\ &\iff f(x) \in \pi(C_1) = \pi(C_2) \\ &\iff f(x) \in f[C_2] \\ &\iff x \in C_2 \quad \text{(γιατί η } f \text{ είναι 1-1).} \end{aligned}$$

Επομένως $C_1 = C_2$ και η π είναι 1-1.

Για το επί, θεωρούμε $D \subseteq B$ και παίρνουμε $C = f^{-1}[D]$. Δείχνουμε ότι $\pi(C) = D$. Για κάθε $y \in Y$ έχουμε

$$\begin{aligned} y \in \pi(C) &\iff y \in f[C] \\ &\iff f^{-1}(y) \in C \quad \text{(ορίζεται η συνάρτηση } f^{-1} : B \to A) \\ &\iff f^{-1}(y) \in f^{-1}[D] \\ &\iff f(f^{-1}(y)) \in D \\ &\iff y \in D. \end{aligned}$$

Άρα $\pi(C) = D$ και η π είναι επί.

Για την ισότητα $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Z}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ παρατηρούμε ότι εφόσον τα σύνολα $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ είναι άπειρα αριθμήσιμα έχουμε από τον ορισμό ότι $\mathbb{N} =_c \mathbb{Z} =_c \mathbb{Q}$. Οπότε με εφαρμογή του πιο πάνω έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 5 (Σελ. 16 και Λήμμα 2.24)**.** Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \Delta : f(A) = \chi_A$$

είναι $1-1$ και επί, όπου Δ είναι το σύνολο όλων των δυαδικών ακολουθιών. Συμπεράνετε ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \Delta$ και $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{R}$.

Λύση.

Δείχνουμε αρχικά ότι η f είναι $1-1$. Υποθέτουμε ότι $f(A) = f(B)$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} n \in A &\iff \chi_A(n) = 1 \\ &\iff f(A)(n) = 1 \\ &\iff f(B)(n) = 1 \\ &\iff \chi_B(n) = 1 \\ &\iff n \in B. \end{aligned}$$

Άρα $A = B$ και η f είναι $1-1$. Δείχνουμε τώρα ότι είναι και επί. Αν $\alpha \in \Delta$ ορίζουμε

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) = 1\} \subseteq \mathbb{N}$$

και δείχνουμε ότι $f(A) = \alpha$. Έχουμε

$$f(A)(n) = 1 \iff \chi_A(n) = 1 \iff n \in A \iff \alpha(n) = 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή οι ακολουθίες $f(A)$ και α παίρνουν τιμές μόνο 0 ή 1 προκύπτει από την πιο πάνω ισοδυναμία ότι $f(A) = \alpha$.

Προκύπτει ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \Delta$. Είναι γνωστό ότι $\Delta =_c C =$ το σύνολο Cantor, και επιπλέον είναι σαφές ότι $C \leq_c \mathbb{R}$ αφού $C \subseteq \mathbb{R}$. Οπότε έχουμε

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \Delta =_c C \leq_c \mathbb{R}.$$

Άσκηση 6 (Λήμμα 2.25)**.** Δείξτε ότι $\mathbb{R} \leq_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Συμπεράνετε ότι $\mathbb{R} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Υπόδειξη: Κάθε πραγματικός αριθμός καθορίζεται από το σύνολο όλων των ρητών αριθμών που είναι μικρότεροί του.

Λύση.
Ορίζουμε τη συνάρτηση $\pi : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ με

$$\pi(x) = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\}.$$

Από την πυκνότητα των ρητών αριθμών έχουμε ότι για κάθε $x < y$ υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $x < q < y$. Ειδικότερα $q \in \pi(y)$ και $q \notin \pi(x)$. Επομένως $\pi(x) \neq \pi(y)$ για κάθε $x < y$ και άρα η συνάρτηση π είναι 1-1.

Αφού $\mathbb{Q} =_c \mathbb{N}$ έχουμε από γνωστή άσκηση ότι $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Συνεπώς

$$\mathbb{R} \leq_c \mathcal{P}(\mathbb{Q}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{R},$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \Delta =_c C =$ το σύνολο Cantor. Από το Θεώρημα Schröder-Bernstein προκύπτει $\mathbb{R} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Άσκηση 7 (Προβλήματα x2.1 και x2.2)**.** Δίνονται πραγματικοί αριθμοί $a < b$.

(i) Ορίστε μία 1-1 και επί συνάρτηση $f : (0,1) \rightarrowtail\!\!\!\rightarrow (a,b)$.

(ii) Ορίστε μια 1-1 και επί συνάρτηση $g : (0,1) \rightarrowtail\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}$.

(iii) Δείξτε ότι $(a,b) =_c (a,b] =_c \mathbb{R}$.

Λύση.
(i) Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = a + (b-a)\cdot x$, όπου $x \in (0,1)$. Προφανώς η f είναι 1-1. Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι $f(x) \in (a,b)$ για κάθε $x \in (0,1)$ και πως για κάθε $y \in (a,b)$ υπάρχει $x \in (0,1)$, συγκεκριμένα το $x = (y-a)/(b-a)$, με $f(x) = y$.

(ii) Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση της εφαπτομένης $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 και επί. Από το (i) η συνάρτηση

$$x \in (0,1) \mapsto -\frac{\pi}{2} + \pi \cdot x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

είναι 1-1 και επί. Επομένως μπορούμε να πάρουμε τη σύνθεση των δύο συναρτήσεων $g : (0,1) \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \tan\left(-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot x\right)$$

που είναι φυσικά 1-1 και επί.

(iii) Προφανώς $(a,b) \leq_c (a,b] \leq_c \mathbb{R}$. Από τα (i) και (ii) έχουμε $\mathbb{R} =_c (0,1) =_c (a,b)$, επομένως

$$(a,b) \leq_c (a,b] \leq_c \mathbb{R} =_c (a,b)$$

και με χρήση του Θεωρήματος Schröder-Bernstein έχουμε το ζητούμενο.

Σχόλιο στη λύση του (iii): Με λίγη περισσότερη δουλειά μπορεί κανείς να ορίσει κατευθείαν (δηλαδή χωρίς τη χρήση του Θεωρήματος Schröder-Bernstein) αντιστοιχίες μεταξύ των ζητούμενων συνόλων.